Title

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理

Name

永原 健大郎、江原 慶

抄録

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、マルクス経済学の生産論および生産価格論の根幹をなすものである。しかし、いずれも標準的な数学の内容とは言い難く、特に Hawkins-Simon 条件は経済数学の教科書以外で解説されることは稀である。

他方で、マルクス経済学の教科書や研究書では、いずれも証明済みの命題として扱われることが多い。そのために、証明のプロセスを知るには、経済数学の教科書を参照することになる。

しかし、経済数学の教科書の内容は、多くの経済学徒にとってかなり難解で、分量も多い。しかも、Hawkins-Simon の条件の性質と Perron-Frobenius の定理の証明だけをフォローしたくても、結局通読を必要とするケースが多い。

そのため、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、そのマルクス経済学にとっての重要度は高いにもかかわらず、学習しにくい内容になっている。そこで本稿では、大学教養レベルの、ごく初歩的な線形代数の知識のみを前提として、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理を解説・証明する。

マルクス経済学の生産論・生産価格論において、最も基本的なレベルに属する部分だけに内容を絞ることで、分量を抑えてある。証明プロセスのベースは、経済学分野でもよく参照される二階堂副包『経済のための線型数学』(培風館、1961 年）であるが、説明が省略されている箇所を補い、また用語も今のものにアップデートしている。

第 1 節（永原担当）では、数学的議論が展開される。ここが上で述べた本稿の主要な貢献部分である。

第 2 節（江原担当）では、すでに広く知られていることであるが、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的意味を述べ、第 1 節の貢献をマルクス経済学の研究の観点から補強する。さらに、2 部門の一般的なケースで、Hawkins-Simon の条件の経済学的性質の解説、「マルクスの基本定理」および Perron-Frobenius の定理の証明を与える。これによって、高校数学「数学 I」までの範囲で、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的エッセンスはフォローできる。

キーワード：マルクスの基本定理、生産価格、連立一次方程式の非負値解、固有値問題、単純固有値

Title

Hawkins-Simon Condition and Perron-Frobenius Theorem

Name

Kentaro Nagahara, Kei Ehara

Abstract

The Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem constitute the essence of the theory of production in Marxian economics. Actually, the two are not found in standard textbooks of mathematics. However, in textbooks and papers of Marxian economics, they are often treated as propositions already proven. In order to understand the proof, it is necessary to refer to textbooks on economic mathematics, which are quite challenging for many students of economics. Moreover, even if one intends to follow only the properties of the Hawkins-Simon condition and the proof of the Perron-Frobenius theorem, many textbooks require thorough reading.

As a result, despite their high importance in Marxian economics, the Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem are difficult to learn. This paper explains and proves the two, assuming only very basic knowledge of linear algebra at the university level. In Section 1 (authored by Nagahara), mathematical discussions are developed, which constitute the main contributing part of this paper as mentioned above.

Section 2 (authored by Ehara) describes the economic significance of the Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem, thereby reinforcing the contributions of Section 1 from the perspective of Marxian economics. Furthermore, it provides explanations of the economic properties of the Hawkins-Simon conditions and the proofs of “Fundamental Marxian Theorem” and the Perron-Frobenius theorem in the general case of the two sector model.

Keyword: Fundamental Marxian Theorem, Price of Production, Non-negative solution of simultaneous linear equation, Eigenvalue problem, Simple eigenvalue

はじめに

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、マルクス経済学の生産論および生産価格論の根幹をなすものである。しかし、いずれも標準的な数学の内容とは言い難く、特に Hawkins-Simon 条件は経済数学の教科書以外で解説されることは稀である。

他方で、マルクス経済学の教科書や研究書では、いずれも証明済みの命題として扱われることが多い。そのために、証明のプロセスを知るには、経済数学の教科書を参照することになる。

しかし、経済数学の教科書の内容は、多くの経済学徒にとってかなり難解で、分量も多い。しかも、Hawkins-Simon の条件の性質と Perron-Frobenius の定理の証明だけをフォローしたくても、結局通読を必要とするケースが多い。

そのため、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、そのマルクス経済学にとっての重要度は高いにもかかわらず、学習しにくい内容になっている。そこで本稿では、大学教養レベルの、ごく初歩的な線形代数の知識のみを前提として、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理を解説・証明する。

マルクス経済学の生産論・生産価格論において、最も基本的なレベルに属する部分だけに内容を絞ることで、分量を抑えてある。証明プロセスのベースは二階堂（1961）であるが、説明が省略されている箇所を補い、また用語も今のものにアップデートしている。二階堂（1961）はすでに絶版なので､その欠を補うことも企図されている。

第 1 節（永原担当）では、数学的議論が展開される。ここが上で述べた本稿の主要な貢献部分である。

第 2 節（江原担当）では、すでに広く知られていることであるが、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的意味を述べ、第 1 節の貢献をマルクス経済学の研究の観点から補強する。さらに、2 部門の一般的なケースで、Hawkins-Simon の条件の経済学的性質の解説、「マルクスの基本定理」および Perron-Frobenius の定理の証明を与える。これによって、高校数学「数学 I」までの範囲で、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的エッセンスはフォローできる。

1.　数学的議論

1.1.　Hawkins-Simon の条件

1.1.1.　一次方程式系

以下のようなn元連立 1 次方程式を考える。

$$
\begin{cases}
b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1i}x_i + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{ii}x_i + \cdots + b_{in}x_n = c_i \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{ni}x_i + \cdots + b_{nn}x_n = c_n
\end{cases}
\tag{1.1.1}
$$

ここで、係数行列を$B=(b_{ij})$、縦ベクトルを$\boldsymbol{c}={}^t(c_1,c_2,\dots,c_n)$などと表せば、方程式 (1.1.1) は

$$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$$

の形であらわせる。係数b_{ij}に次のような条件を付ける。

非対角成分の非正条件

$$b_{ij}\leqq 0\ (i\neq j, i,j=1,2,\dots,n) \tag{1.1.2}$$

ここでは、Bの対角成分$b_{ii}\ (i=1,2,\dots,n)$について特に条件をつけないものとして証明を進めよう。

1.1.2. Hawkins-Simon の条件

ここでは、方程式 (1.1.1) において、非斉次項$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$の各成分が$c_i\geq 0$を満たすとき、非負の解$x_i\geq 0 (i=1,2,\dots,n)$を持つ係数行列$B$の十分条件を調べよう。以降、表現を簡潔にするため、行列$B=(b_{ij})$に含まれる全ての成分b_{ij}が、定符号、あるいは非負値、非正値であることをそれぞれ$B>0$, $B<0$, $B\geq 0$, $B\leq 0$と記すこととする。ベクトル$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$に対しても同様の記法を適用する。例えば、$\boldsymbol{x}>0$と表したら$x_1>0$, $x_2>0$, …, $x_n>0$を意味する。

初めに、主座小行列について定義しよう。ここでは、実数$\mathbb{R}$を成分に持つn次正方行列全体の集合を$M_n(\mathbb{R})$と書く。なお、$\mathbb{R}^{n\times n}$も、同じくn次正方行列全体の集合を表す意味でよく使われる。

定義 1（k次首座小行列）$B\in M_n(\mathbb{R})$、および$1\leq k\leq n$に対して、

$$B_k=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk}\end{pmatrix}$$

を、Bの **k 次首座小行列**といい、B_kの行列式

$$|B_k|=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk}\end{vmatrix}$$

を、Bの **k 次首座小行列式**という。なお、Bの **n 次首座小行列** B_nは、Bと等しい。

これを用いると、Hawkins-Simon の条件を以下のように記述できる。

条件 1（Hawkins-Simon の条件）

方程式 (1.1.1) の係数行列$B=(b_{ij})$の k 次首座小行列式$|B_k|$に対して、

$$|B_k|>0\ (k=1,2,\dots,n)$$

が成立する。

すなわち、条件 1 は、係数行列 Bの全ての首座小行列式が正の値を取るという条件である。

1.1.3. Hawkins-Simon の条件と非負値解

続いて、方程式 (1.1.1) の解を特徴づける 2 つの条件を述べよう。

条件 2　方程式 (1.1.1) は、ある 1 つの非斉次項$\boldsymbol{c} > 0$に対して、非負値解$\boldsymbol{x_c} \geq 0$を持つ。

条件 3　方程式 (1.1.1) は、任意の非斉次項$\boldsymbol{c} \geq 0$に対して、非負値解$\boldsymbol{x} \geq 0$を持つ。

じつは、方程式 (1.1.1) における係数行列Bが Hawkins-Simon の条件を満たすことと、方程式 (1.1.1) の解が条件 2、3 を満たすことは同値である。以下、これを定理の形でまとめて証明しよう。

定理 1　方程式 (1.1.1) において、条件 1、条件 2、条件 3 は互いに同値である。

Proof. 数学的帰納法を用いて、全ての n の場合に、条件 2 ⇒条件 1 ⇒条件 3 ⇒条件 2…（*）が成り立つことを証明すればよい。

$n=1$の場合：

（条件 2 ⇒条件 1）を示す。方程式 (1.1.1) は$b_{11}x_1 = c_1$と表される。条件 2 を仮定すると、ある$c_1 > 0$に対して$x_1 \geq 0$が存在する。ここで、$b_{11}x_1 = c_1 > 0$より$b_{11} \neq 0$, $x_1 \neq 0$となるから、$x_1 > 0$である。従って、$b_{11} = c_1/x_1 > 0$を得る。一方、条件 1 は$n=1$の場合$|B| = b_{11} > 0$であるから、先ほどの計算より条件 1 が成立している。

(条件 1 ⇒条件 3) を示す。条件 1 より$|B| = b_{11} > 0$であるから、$x_1 = c_1/b_{11}$である。従って、任意の$c_1 \geq 0$に対して、$x_1 \geq 0$となるので、条件 3 が成立する。

（条件 3 ⇒条件 2）は、条件の主張から明らかである。従って、$n=1$のときに、(*）が成り立つことが示された。

nが 2 以上の整数の場合：

数学的帰納法により、$n-1$のとき、(*）が成立すると仮定する。このとき、nにおいて、(*）が成立することを示せばよい。

(条件 2 ⇒条件 1) を示す。条件 2 より、ある 1 つの非斉次項$\boldsymbol{c} > 0$に対して、対応する非負値解$\boldsymbol{x_c} \geq 0$が存在する。すなわち、

$$B\boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{c}.$$

ここで、非負値解$\boldsymbol{x_c}$の各成分を$x_{\mathbf{c},i} (i = 1, 2, \ldots, n)$と書くと、$x_{\mathbf{c},i} \geq 0$であることに注意しよう。方程式 (1.1.1) の第 1 式

$$b_{11}x_{\mathbf{c},1} + b_{12}x_{\mathbf{c},2} + \cdots + b_{1i}x_{\mathbf{c},i} + \cdots + b_{1n}x_{\mathbf{c},n} = c_1$$

を変形すれば、

$$b_{11}x_{\mathbf{c},1} = c_1 - \sum_{j=2}^{n} b_{1j}x_{\mathbf{c},j}$$

この時、右辺第 2 項について、非対角成分の非正条件から、$b_{1j} \leq 0 \ (j = 2, 3, \ldots, n)$であり、条件 2 より$x_{\mathbf{c},j} \geq 0 \ (j = 2, 3, \ldots, n)$であるから、

$$-\sum_{j=2}^{n} b_{1j} x_{\boldsymbol{c},j} \geq 0$$

である。従って、$b_{11}x_{\boldsymbol{c},1} \geq c_1$である。今、$c_1 > 0$であるから、$b_{11} \neq 0$、$x_{\boldsymbol{c},1} \neq 0$となる。すなわち条件 2 より、$x_{\boldsymbol{c},1} > 0$、$b_{11} > 0$である。

次に、係数行列Bに対して行基本変形（左基本変形）を行い、方程式 (1.1.1) からx_1を消去する。すなわち、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & c_n \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} - b_{12}b_{21}/b_{11} & \dots & b_{2n} - b_{1n}b_{21}/b_{11} & c_2 - c_1 b_{21}/b_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} - b_{12}b_{n1}/b_{11} & \dots & b_{nn} - b_{1n}b_{n1}/b_{11} & c_n - c_1 b_{n1}/b_{11} \end{array}\right)$$

なお、この行基本変形は、第i行$(i = 2, 3, \dots, n)$に、第 1 行の$-b_{i1}/b_{11}$倍を足したものである。[1] 第 2 行、第 2 列以降の成分について、

$$b_{ij}^* := b_{ij} - \frac{b_{1j}b_{i1}}{b_{11}}, \quad c_i^* := c_i - \frac{c_1 b_{i1}}{b_{11}} \ (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

とおき直す。ここで、$B^* \in M_{n-1}(\mathbb{R})$、$\boldsymbol{c}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$を用いて、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22}^* & \dots & b_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2}^* & \dots & b_{nn}^* & c_n^* \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & B^* & & \boldsymbol{c}^* \\ 0 & & & & \end{array}\right)$$

と書くことにする。このことは、行基本変形の定義により、ある正則行列Pが存在して、

$$PB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad P\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ \boldsymbol{c}^* \\ \\ \end{pmatrix}$$

と書けることに他ならない。つまり、ここまでの操作は方程式 (1.1.1) を、

$$B\boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{c} \Leftrightarrow PB\boldsymbol{x_c} = P\boldsymbol{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \boldsymbol{x_c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ \boldsymbol{c}^* \\ \\ \end{pmatrix}$$

の形に書き換えたことに相当する。従って、第 1 行の方程式を変形すれば、

$$x_{\boldsymbol{c},1} = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j} x_{\boldsymbol{c},j}}{b_{11}}$$

であり、$x_{\boldsymbol{c},1}$が$x_{\boldsymbol{c},i}\ (i = 2, 3, \dots, n)$を用いて表せたことになる。その上$x_{\boldsymbol{c},i}\ (i = 2, 3, \dots, n)$は、方程式

[1] 非対角成分が 0 となる可能性があるため、このように一度に変形する手続きとなる。

$$B^*\begin{pmatrix} x_{\boldsymbol{c},2} \\ x_{\boldsymbol{c},3} \\ \vdots \\ x_{\boldsymbol{c},n} \end{pmatrix} = \boldsymbol{c}^* \tag{1.1.3}$$

の解でもある。

ここで、方程式 (1.1.3) の係数行列B^*と非斉次項$\boldsymbol{c}^*$の符号について確認しよう。$i, j = 2, 3, \ldots, n$に対し、非対角成分の非正条件から、$b_{i1} \leq 0$、$b_{1j} \leq 0$であり、$b_{11} > 0$であるから、$b_{1j}b_{i1}/b_{11} \geq 0$となる。すなわち、

$$b^*_{ij} = b_{ij} - \frac{b_{1j}b_{i1}}{b_{11}} \leq b_{ij}$$

である。特に、$i \neq j$の時は、$b_{ij} \leq 0$であるから、

$$b^*_{ij} \leq 0 \; (i \neq j, i, j = 2, 3, \ldots, n)$$

となる。さらに、$c_1 > 0$であるから、$c_1 b_{i1}/b_{11} \leq 0 \, (i = 2, 3, \ldots, n)$、すなわち、

$$c^*_i = c_i - \frac{c_1 b_{i1}}{b_{11}} > c_i > 0 \; (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{1.1.4}$$

となる。すなわち、方程式 (1.1.3) は、非対角成分の非正条件を満たし、ある正の非斉次項$\{c^*_i\}^n_{i=2} > 0$に対し、非負値解$x_{\boldsymbol{c},i} \geq 0 \; (i = 2, 3, \ldots, n)$を持つ$n-1$元連立１次方程式である。このとき帰納法の仮定により、方程式 (1.1.3) は条件 1 が成立する。すなわち、B^*のk次首座小行列式$|B^*_k|$に対して、

$$|B^*_k| = \begin{vmatrix} b^*_{2,2} & \cdots & b^*_{2,k+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^*_{k+1,2} & \cdots & b^*_{k+1,k+1} \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

である。ここで、行基本変形においては、ある行に他の行の定数倍を加えても、行列式の値は変わらないので、Bのk次首座小行列式$|B_k|$は、$2 \leq k \leq n$のとき、

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} - b_{12}b_{21}/b_{11} & \cdots & b_{2k} - b_{1k}b_{21}/b_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k2} - b_{12}b_{k1}/b_{11} & \cdots & b_{kk} - b_{1k}b_{k1}/b_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b^*_{22} & \cdots & b^*_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b^*_{k2} & \cdots & b^*_{kk} \end{vmatrix}$$

となる。従って、第 1 列で展開すれば、$b_{11} > 0$から

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b^*_{22} & \cdots & b^*_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b^*_{k2} & \cdots & b^*_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b^*_{22} & \cdots & b^*_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^*_{k2} & \cdots & b^*_{kk} \end{vmatrix} = b_{11}|B^*_{k-1}| > 0$$

が成り立つので、$|B_k| > 0 \; (k = 1, 2, \cdots, n)$となり、条件 1 が成り立つことが示された。

（条件 1 ⇒ 条件 3）を示す。任意の非斉次項$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$で、$\boldsymbol{c} \geq 0$を満たすものを取る。条件より、方程式 (1.1.1) の係数行列Bのk次首座小行列式$|B_k| > 0 \; (k = 1, 2, \cdots, n)$が成立する。従って、$|B| = |B_n| > 0$であるから、$B$の逆行列$B^{-1}$が存在する。ゆえに、方程式 (1.1.1) はただ一つの解$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$を持つ。この解を$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$と表す。また、ここで、$|B_1| = b_{11} > 0$に注意して、$\boldsymbol{x}^* = {}^t(x_2, x_3, \ldots, x_n)$と表すこととすれば、方程式 (1.1.1) から$x_1$を消去するときと同様の行基本変形により、

$$Bx = c \Leftrightarrow PBx = Pc \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ \boldsymbol{x}^* \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \\ \boldsymbol{c}^* \\ \\ \end{pmatrix}$$

と計算できる。従って、$\boldsymbol{x}$の各成分$\{x_i\}_{i=1}^n$はそれぞれ、

$$x_1 = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}x_j}{b_{11}} \tag{1.1.5}$$

$$B^*\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^* \tag{1.1.6}$$

と表せる。次に、方程式 (1.1.6) の係数行列B^*が条件 1 を満たすことを示そう。先ほどと同様の計算より、$2 \leq k \leq n$に対して、

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22}^* & \dots & b_{2k}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k2}^* & \dots & b_{kk}^* \end{vmatrix} = b_{11}|B_{k-1}^*| > 0$$

であるから、$B^* \in M_{n-1}(\mathbb{R})$の$k$次首座小行列式に対して、

$$|B_k^*| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

が成立し、B^*は条件 1 を満たす。

従って、帰納法の仮定より、係数行列B^*が条件 1 を持つ方程式

$$B^*\boldsymbol{y}^* = \hat{\boldsymbol{c}} \tag{1.1.7}$$

は、$\hat{\boldsymbol{c}} \geq 0$を満たす任意の非斉次項$\hat{\boldsymbol{c}} \in \mathbb{R}^{n-1}$に対し、ただ一つの非負値解$\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$を持つ。ここで、不等式 (1.1.4) より$\boldsymbol{c}^* \geq 0$が成立するため、$\hat{\boldsymbol{c}}$に$\boldsymbol{c}^*$を代入すれば、方程式 (1.1.6) と (1.1.7) は一致する。方程式 (1.1.7) の非負値解$\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$はただ一つであるため、これは$\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{x}^*$であることに他ならない。故に、$x_i \geq 0 \ (i = 2, 3, \dots, n)$が示された。

さらに、$b_{1j} \leq 0 \ (j = 2, 3, \dots n)$、$b_{11} > 0$であるから、$x_1$を表す等式 (1.1.5) より、

$$x_1 = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_{1j}x_j}{b_{11}} > \frac{c_1}{b_{11}} \geq 0$$

となるので、$\boldsymbol{x} \geq 0$が示された。

（条件 3 ⇒条件 2）は明らかであるので、省略する。以上から、定理の結論を得る。

□

1.1.4. Hawkins-Simon の条件と逆行列の非負値性

実は、方程式 (1.1.1) において、条件 1 から条件 3 と同値の条件がもう一つある。

条件 4　方程式 (1.1.1) の係数行列$B = (b_{ij})$は、全ての成分が非負である逆行列B^{-1}を持つ。

定理 2　方程式 (1.1.1) において、条件 1、条件 2、条件 3、条件 4 は互いに同値である。

Proof. 条件 1 ⇒条件 4 ⇒条件 3 を示せば、定理 1 から全ての定理が同値であることが示される。

（条件 1 ⇒条件 4）を示す。方程式 (1.1.1) の係数行列Bは、条件 1 を仮定しているので$|B|>0$であり、逆行列B^{-1}を持つ。定理 1 より、条件 1 が成立すれば条件 3 も成立するので、任意の非斉次項$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$で、$\boldsymbol{c}\geq 0$を満たすものをとれば、方程式 (1.1.1) は非負値解$\boldsymbol{x_c}\in\mathbb{R}^n$を持つ。

ここで、逆行列を$B^{-1}=(\beta_{ij})$、非負値の非斉次項を$\boldsymbol{c}={}^t(c_1,c_2,\dots,c_n)$、非負値解を$\boldsymbol{x_c}={}^t(x_{\boldsymbol{c},1},x_{\boldsymbol{c},2},\dots,x_{\boldsymbol{c},n})$と書けば、

$$\boldsymbol{x_c}=B^{-1}\boldsymbol{c} \tag{1.1.8}$$

である。ここで、$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$は非負値であれば任意であるので、任意の$j=1,2,\dots,n$に対し、$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_j={}^t(0,0,\dots,0,\overset{j}{1},0,\dots,0)$とおけば、

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j}=B^{-1}\boldsymbol{e}_j$$

となる。すると、

$$B^{-1}\boldsymbol{e}_j=\begin{pmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\dots&\beta_{1n}\\ \beta_{21}&\beta_{22}&\dots&\beta_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \beta_{n1}&\beta_{n2}&\dots&\beta_{nn}\end{pmatrix}\boldsymbol{e}_j=\begin{pmatrix}\beta_{1j}\\ \beta_{2j}\\ \vdots\\ \beta_{nj}\end{pmatrix}$$

となるから、左辺の$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j}$と各成分を比較すれば、

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,i}=\beta_{ij}$$

である。条件 3 より、$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,i}\geq 0\ (i=1,2,\dots,n)$であるから、$\beta_{ij}\geq 0\ (i=1,2,\dots,n)$となる。従って、全ての$j=1,2,\dots,n$に対して同様の操作を行うことで、$\beta_{ij}\geq 0\ (i=1,2,\dots,n)$を得る。

（条件 4 ⇒条件 3）を示す。任意の非負値な非斉次項$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$を取る。方程式 (1.1.8) の右辺を計算すると、各行について

$$x_{\boldsymbol{c},i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}c_j$$

と表される。条件 4 より、$B^{-1}\geq 0$と仮定すると、$\boldsymbol{c}\geq 0$であるので

$$x_{\boldsymbol{c},i}=\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}c_j\geq 0$$

となる。従って、解は$\boldsymbol{x_c}\geq 0$を満たし、条件 3 が成立する。

□

以降、これら 4 つの条件は全て同値であるので、これらを満たす方程式 (1.1.1) の係数行列を、**Hawkins-Simon の条件を満たす係数行列**などと呼ぶことにする。

1.2. Perron-Frobenius の定理

1.2.1. Frobenius 根

$A \in M_n(\mathbb{R})$を任意の非負行列とする。すなわち、$A = (a_{ij}) \geq 0 \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$を満たしている。$I \in M_n(\mathbb{R})$を$n$次単位行列とする。すなわち、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i = j) \\ 0 & \text{if } (i \neq j) \end{cases}$$

を用いて、$I = (\delta_{ij})$で表せる。δ_{ij}をクロネッカーのデルタという。

$\rho \in \mathbb{R}$ を任意にとり、$B_\rho = \rho I - A$ とおく。このとき、$B_\rho = (b_{\rho,ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ は、$a_{ij} \geq 0$ であるから $b_{\rho,ij} = -a_{ij} \leq 0 \ (i \neq j)$となり、非対角成分の非正値性を満たしている。すなわち、第 1.1 節で考えた方程式 (1.1.1) の係数行列Bに$B_\rho = \rho I - A$を適用することで得られる方程式

$$(\rho I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \tag{1.2.1}$$

に対しては、$B_\rho = \rho I - A$が Hawkins-Simon の条件を満たせば、第 1.1 節で証明した定理 2 が適用できることとなる。

ここまでの設定により、B_ρが Hawkins-Simon の条件を満たすかどうかは、ρ にのみ依存して決定される。このような $\rho \in \mathbb{R}$ の分布に関する、次の重要な定理を証明する。

定理 3　ある $\rho^* > 0$ が存在し、任意の $\rho \geq \rho^*$ に対して、方程式 (1.2.1) の係数行列 B_ρ は、Hawkins-Simon の条件を満たす。

Proof. いくつかのステップに分けて証明を行う。

Step 1. B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たすような $\rho \in \mathbb{R}$ が少なくとも一つ存在する。
(Step 1 の証明) 任意の正値ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を一つ選ぶ。このとき方程式 (1.2.1) の左辺を具体的に表すと、

$$(\rho I - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \rho - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \rho - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\left(\rho x_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \ldots, \rho x_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)$$

となる。ここで、ある集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ の要素のうち、最大のものを $\max A$、あるいは $\max_{1 \leq i \leq n}\{a_i\}$ と書くことにする。このとき、全ての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right\} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} x}{x_i}$$

であるから、ρ^* を

$$\rho^* > \max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right\}$$

を満たすように取れば、全ての $i=1,2,\dots,n$ に対し

$$\rho^* x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}x_j}{x_i}\right)x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0$$

となり、方程式 (1.2.1) の全ての成分が正となる。このとき、非斉次項$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$として

$$\boldsymbol{c} = {}^t\left(\rho^* x_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \rho^* x_n - \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right)$$

と選べば、$\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$であり、方程式 (1.2.1) は$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0}$を解に持つ。従って条件 2 を満たすので、係数行列B_{ρ^*}は Hawkins-Simon の条件を満たす。

Step 2. 方程式 (1.2.1) の係数行列B_{ρ^*}が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、$\rho\ge\rho^*$ に対する係数行列 B_ρ も Hawkins-Simon の条件を満たす。

(Step 2 の証明) B_{ρ^*}が Hawkins-Simon の条件を満たしているため、方程式 (1.2.1) は条件 2 より、ある正値のベクトル$\boldsymbol{c}^*\in\mathbb{R}^n$に対して、

$$B_{\rho^*}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^* \tag{1.2.2}$$

を満たす非負値解 $\boldsymbol{x}^*\in\mathbb{R}^n$ を持つ。

ここで、$\rho>\rho^*$を満たす任意の ρ に対し、

$$\boldsymbol{c} = (\rho-\rho^*)I\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{c}^*$$

とおく。仮定より、$\rho-\rho^*>0$ となるから、$(\rho-\rho^*)I\boldsymbol{x}^*\ge 0$。また、$\boldsymbol{c}^*>0$ より、$\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$が成り立つ。

さらに、$B_{\rho^*}\boldsymbol{x}^* - c^* = 0$ であるから、

$$\begin{aligned} B_\rho\boldsymbol{x}^* &= B_\rho\boldsymbol{x}^* - (B_{\rho^*}\boldsymbol{x}^* - c^*) \\ &= \{(\rho I - A) - (\rho^* I - A)\}\boldsymbol{x}^* + c^* \\ &= (\rho-\rho^*)I\boldsymbol{x}^* + c^* = \boldsymbol{c} \end{aligned}$$

となるので、係数行列 B_ρ はある非斉次項$\boldsymbol{c}>\boldsymbol{0}$に対して、非負値解$\boldsymbol{x}^*$を持つ。これは条件 2 に他ならず、従って定理 2 より Hawkins-Simon の条件を満たす。

Step 3. 方程式 (1.2.1) の係数行列B_{ρ^*}が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、$\rho^*>0$

(Step 3 の証明) 背理法で証明する。$\rho^*\le 0$と仮定する。B_{ρ^*}は Hawkins-Simon の条件を満たすため、条件 2 より、ある正値の非斉次項$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$に対し、$B_{\rho^*}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$を満たす非負値解$\boldsymbol{x_c}$が存在する。

一方、任意の非負値を取るベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して、$A\ge 0$であるから、

$$B_{\rho^*}\boldsymbol{x} = (\rho I - A)\boldsymbol{x} = \rho I\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} \le 0$$

となるが、$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x_c}$ とすると、$B_{\rho^*}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}>0$となる非斉次項 $\boldsymbol{c}$ の存在に矛盾する。

定理 3 より、係数行列 B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たす $\rho \in \mathbb{R}$ 全体からなる集合 $B(P)$ は区間であり、下に有界である。よって、実数の連続性公理により、区間 $B(P)$ の下限 $\rho^* \geq 0$ が存在する。なお、区間 $B(P)$ の下限とは、$B(P)$ に属す実数がぎりぎり近づける値のことである。例えば区間 $x > 1$ の下限は 1 である。実は、この下限 ρ^* が、係数行列 B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たすかどうかの閾値である **Frobenius 根**に相当する。しかし定理 3 では、ρ^* がどのように与えられるのかについては触れられておらず、詳細をより明らかにするには、いくつかの準備が必要となる。

1.2.2. 固有値問題

一般の行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、方程式

$$\boldsymbol{A x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1.2.3}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$、及び $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき、λ を固有値、$\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルと呼ぶ。A の固有値全体を $\sigma_p(A)$ と表す。n 次単位行列 I を用いて $\lambda \boldsymbol{x} = \lambda I \boldsymbol{x}$ となることに注意して、固有値問題 (1.2.3) を書き換えると、

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{1.2.4}$$

となる。固有値問題 (1.2.3) において、λ が固有値であることは、左辺の逆行列 $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在しないことと同値である。なぜなら、$(\lambda I - A)^{-1}$ が存在する場合は、固有値問題 (1.2.3) に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛ければ

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = (\lambda I - A)^{-1}\boldsymbol{0}$$

が得られる。すなわち、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に矛盾する。左辺の逆行列 $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在しない条件は、$|\lambda I - A| = 0$ であるから、λ が固有値であることは、$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A|$ と書けば、λ が方程式

$$\varphi(\lambda) = 0 \tag{1.2.5}$$

の解となることと同値である。この $\varphi(\lambda)$ を A の固有多項式、あるいは特性多項式といい、方程式 (1.2.5) を A の**固有方程式**や**特性方程式**とよぶ。

$A \in M_n(\mathbb{R})$ の場合、A の固有多項式 $\varphi(\lambda)$ は実数係数の n 次多項式である。よって、A の固有方程式は実数係数の n 次方程式となる。そのため、解 λ は、代数学の基本定理により、重複を許せば n 個であり、一般には複素数で、固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ も成分が複素数となる。

ここまでの準備で、A の固有値全体の集合 $\sigma_p(A)$ は

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0\}$$

と書くことができ、A の固有値全体 $\sigma_p(A)$ の要素の個数は、重複を許せば n 個であることが分かる。

実は、$A \in M_n(\mathbb{R})$ が非負行列の場合は、非負の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。しかも、非負の固有値の中で最大の固有値に対応する固有ベクトルで、各成分は 0 以上の実数となるものが存在するという著しい性質を持つ。

1.2.3. Perron-Frobenius の定理

以降、2 つの行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し、$A - B \leq 0$、$A - B < 0$ であることを、それぞれ $A \leq B$、$A < B$ と書く。これの逆向きの不等号や、ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対しても、同様の表記を用いる。さらに、行列 A の全

ての成分が 0 であることを$A=\boldsymbol{O}$と記し、ベクトル$\boldsymbol{x}$についても同様に$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$と表す。

定理 4（Perron-Frobenius の定理）　$A\in M_n(\mathbb{R})$を非負行列とする。このとき、以下の 2 つの主張が成りたつ。

Claim 1. Aは非負固有値をもち、それらの中で最大のものを$\lambda(A)$とすれば、$\lambda(A)$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{x}$の各成分は実数からなり、$\boldsymbol{x}\geq 0$となるものが存在する。

Claim 2. $B_\rho=\rho I-A$が Hawkins-Simon の条件を満たすための必要十分条件は、$\rho>\lambda(A)$である。

Aの非負固有値のうち最大の固有値$\lambda(A)$をAの Frobenius 根という。

注意 1　固有値λに対する固有ベクトル$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$は、一つ見つかれば少なくともその定数倍も固有ベクトルとなる。これは、固有値問題 (1.2.3) の両辺に 0 でない定数μを掛ければ、

$$\mu A\boldsymbol{x}=\mu\lambda\boldsymbol{x}\iff A(\mu\boldsymbol{x})=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$$

となり、$\mu\boldsymbol{x}$もまたλに対する固有ベクトルとなる。従って、固有ベクトル$\boldsymbol{x}$全体と$\boldsymbol{0}$からなる線形空間W_λの次元（W_λ に属する任意のベクトル$\boldsymbol{v}$を線形結合の形で表すために必要な最小のベクトルの数）は 1 以上である。なお、μ は一般には複素数としてよく、この事実は第 1.3 節において活用される。

定理 4 の証明の前に、いくつかの準備が必要となる。行列から同じ数の行または列を選んで並べてできる行列を正方小行列という。これについての記号を用意しよう。

定義 2 (正方小行列)　行列$B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$の行から$s$個の行$i_1,i_2,\dots,i_s$ $(1\leq i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_s\leq n)$を選び、$s$個の列$j_1,j_2,\dots,j_s$ $(1\leq j_1\leq j_2\leq\cdots\leq j_s\leq n)$を選んで作った$s$次正方行列を

$$\begin{pmatrix} b_{i_1j_1} & b_{i_1j_2} & \dots & b_{i_1j_s}\\ b_{i_2j_1} & b_{i_2j_2} & \dots & b_{i_2j_s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{i_sj_1} & b_{i_sj_2} & \dots & b_{i_sj_s}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s\end{pmatrix}$$

と書く。これをBのs次正方小行列という。また、この行列式を

$$\left|B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s\end{pmatrix}\right|$$

と書き、これをBのs次正方小行列式という。

注意 2　ある行列から何かしらの行、または列を抜き出した行列についての定義は、文献によって異なっており、混乱の元となるので、都度確認した方がよい。

方程式 (1.1.1) の係数行列Bの正方小行列に関する、次の補題を用意する。

補題 1　方程式 (1.1.1) の係数行列$B\in M_n(\mathbb{R})$が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、Bのs次正方小行列

$$B^{\{i_s\}} = B\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s \end{pmatrix}$$

も Hawkins-Simon の条件を満たす。

Proof. 仮定より、方程式 (1.1.1) は条件 2 を満たす。すなわち、ある非斉次項$\boldsymbol{c} > 0$、に対して、非負値解$\boldsymbol{x} \geq 0$が存在する。以降、この非斉次項$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$、及び非負値解$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$を固定する。また、狭義単調増加な数列$\{i_p\}_{p=1}^{s} \subset \{1,2,\ldots,n\}$、$\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} \subset \{1,2,\ldots,n\}$を、$\{i_p\}_{p=1}^{s} \cup \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \{1,2,\ldots,n\}$、$\{i_p\}_{p=1}^{s} \cap \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \emptyset$と定義する。すなわち、$\{i_p\}_{p=1}^{s}$、$\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$はそれぞれ

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n, \quad 1 \leq i_1^* < i_2^* < \cdots < i_{n-s}^* \leq n$$

を満たし、$\{i_p\}_{p=1}^{s}$、および$\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$の合計n個の数を昇順に並べたら、$1,2,\ldots,n$と並ぶように設定する。
次に、方程式 (1.1.1) の拡大係数行列を、次のような行基本変形により、行を並べ替える。

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} & b_{1s+1} & \ldots & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2s} & b_{2s+1} & \ldots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \ldots & b_{ss} & b_{ss+1} & \ldots & b_{sn} & c_s \\ b_{s+11} & b_{s+22} & \ldots & b_{s+1s} & b_{s+1s+1} & \ldots & b_{s+1n} & c_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{ns} & b_{ns+1} & \ldots & b_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccccc|c} b_{i_11} & b_{i_12} & \ldots & b_{i_1s} & b_{i_1s+1} & \ldots & b_{i_1n} & c_{i_1} \\ b_{i_21} & b_{i_22} & \ldots & b_{i_2s} & b_{i_2s+1} & \ldots & b_{i_2n} & c_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i_s1} & b_{i_s2} & \ldots & b_{i_ss} & b_{ss+1} & \ldots & b_{sn} & c_{i_s} \\ b_{i_1^*1} & b_{i_1^*2} & \ldots & b_{i_1^*s} & b_{i_1^*s+1} & \ldots & b_{i_1^*n} & c_{i_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i_{n-s}^*1} & b_{i_{n-s}^*2} & \ldots & b_{i_{n-s}^*s} & b_{i_{n-s}^*s+1} & \ldots & b_{i_{n-s}^*n} & c_{i_{n-s}^*} \end{array}\right)$$

さらに、行基本変形した方程式 (1.1.1) の各行について、項の順番を非負値解$\boldsymbol{x}$の成分が

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}, x_{i_1^*}, \ldots x_{i_{n-s}^*}$$

となるように並べ替えれば、方程式 (1.1.1) は

$$\begin{cases} b_{i_1i_1}x_{i_1} + b_{i_1i_2}x_{i_2} + \cdots + b_{i_1i_s}x_{i_s} + b_{i_1i_1^*}x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_1i_{n-s}^*}x_{i_{n-s}^*} = c_{i_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{i_si_1}x_{i_1} + b_{i_si_2}x_{i_2} + \cdots + b_{i_si_s}x_{i_s} + b_{i_si_1^*}x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_si_{n-s}^*}x_{i_{n-s}^*} = c_{i_s} \\ b_{i_1^*i_1}x_{i_1} + b_{i_1^*i_2}x_{i_2} + \cdots + b_{i_1^*i_s}x_{i_s} + b_{i_1^*i_1^*}x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_1^*i_{n-s}^*}x_{i_{n-s}^*} = c_{i_1^*} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{i_{n-s}^*i_1}x_{i_1} + b_{i_{n-s}^*i_2}x_{i_2} + \cdots + b_{i_{n-s}^*i_s}x_{i_s} + b_{i_{n-s}^*i_1^*}x_{i_1^*} \cdots + b_{i_{n-s}^*i_{n-s}^*}x_{i_{n-s}^*} = c_{i_{n-s}^*} \end{cases}$$

のように変形できる。すなわち、次の方程式 (1.2.6)

$$
\begin{pmatrix}
b_{i_1 i_1} & b_{i_1 i_2} & \dots & b_{i_1 i_s} & b_{i_1 i_1^*} & \dots & b_{i_1 i_{n-s}^*} \\
b_{i_2 i_1} & b_{i_2 i_2} & \dots & b_{i_2 i_s} & b_{i_2 i_1^*} & \dots & b_{i_2 i_{n-s}^*} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{i_s i_1} & b_{i_s i_2} & \dots & b_{i_s i_s} & b_{s i_1^*} & \dots & b_{s i_{n-s}^*} \\
b_{i_1^* i_1} & b_{i_1^* i_2} & \dots & b_{i_1^* i_s} & b_{i_1^* i_1^*} & \dots & b_{i_1^* i_{n-s}^*} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{i_{n-s}^* i_1} & b_{i_{n-s}^* i_2} & \dots & b_{i_{n-s}^* i_s} & b_{i_{n-s}^* i_1^*} & \dots & b_{i_{n-s}^* i_{n-s}^*}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_s} \\ x_{i_1^*} \\ \vdots \\ x_{i_{n-s}^*} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_s} \\ c_{i_1^*} \\ \vdots \\ c_{i_{n-s}^*} \end{pmatrix}
\iff \hat{B}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{c}} \qquad (1.2.6)
$$

が得られる。ここで、方程式 (1.2.6) の非斉次項$\hat{\boldsymbol{c}}$、および解$\hat{\boldsymbol{x}}$は、元の方程式 (1.1.1) の正値非斉次項$\boldsymbol{c}$、およびそれに対応する非負値解$\boldsymbol{x}$の要素の並べ替えであるので、方程式 (1.2.6) もまた条件 2 を満たす。すなわち、係数行列$\hat{B}$は Hawkins-Simon の条件を満たす。

ここで、係数行列$\hat{B}$のk次首座小行列$\hat{B}_k$は、係数行列$\hat{B}$が Hawkins-Simon の条件を満たすことより、

$$|\hat{B}_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

となる。また、$k = s$とすれば、

$$\hat{B}_s = B^{\{i_s\}}$$

であるから、Bのs次正方小行列$B^{\{i_s\}}$のk次首座小行列$B_k^{\{i_s\}}$と$\hat{B}$のk次首座小行列$\hat{B}_k$は、$1 \leq k \leq s$において一致する。従って、

$$|B_k^{\{i_s\}}| = |\hat{B}_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

となるので、$B^{\{i_s\}}$も Hawkins-Simon の条件を満たすことが示された。

□

この補題をもとに、定理 4 をnについての数学的帰納法で証明しよう。

Step 1. $n = 1$、すなわち$A \in M_1(\mathbb{R})$の場合を証明しよう。初めに **Claim 1** を示す。固有方程式 (1.2.4) は$(\lambda - a_{11})x_1 = 0$となる。$\lambda$が固有値となるのは、$\lambda$が固有方程式 (1.2.5) の解となるときであるから、

$$\varphi(\lambda) = \lambda - a_{11} = 0,$$

すなわち$\lambda = a_{11}$が固有値である。今、条件より$A \geq 0$であるので

$$\lambda = a_{11} \geq 0$$

従って、全ての固有値は非負であり、その中で最大の（実際にはただ一つの）固有値は、$\lambda(A) = a_{11}$となる。

次に、固有値 $\lambda(A) = a_{11}$に対する固有ベクトル$\boldsymbol{x} = x_1$が$\boldsymbol{x} \geq 0$であることを示そう。固有方程式 (1.2.4) より

$$(\lambda(A) - a_{11})x_1 = 0$$

であり、$\lambda(A) - a_{11} = 0$であるから、固有値 $\lambda(A) = a_{11}$に対する固有ベクトル$\boldsymbol{x} = x_1$ は$\mu \neq 0$を用いて$x_1 = \mu \cdot 1$と表せる。従って、固有ベクトルは$\boldsymbol{x} \geq 0$である。なお、$n = 1$の場合は成分が 1 つのみであるから、$\boldsymbol{x} > 0$となる。

続いて、**Claim 2** を示す。$B_\rho = \rho I - A$が Hawkins-Simon の条件を満たすと仮定する。$n = 1$より、方程式 (1.1.1) は

$$(\rho - a_{11})x_1 = c_1$$

と表される。このとき条件 3 より、任意の$c_1 \geq 0$に対して、$x_1 \geq 0$となる条件は、$\rho - a_{11} \geq 0$である。さらに、条件 1 より、$\rho - a_{11} \neq 0$。従って、$\rho - a_{11} > 0$ であるから、$\rho > a_{11}$ となる。一方 $\lambda(A) = a_{11}$ であるから、$\rho > \lambda(A)$である。

逆に、$\rho > \lambda(A)$と仮定する。$\lambda(A) = a_{11}$であるから、$\rho - a_{11} > 0$ となる。これは$|\rho I - A| > 0$そのものであり、条件 1 である Hawkins-Simon の条件を満たす。以上より、$n = 1$の時が示された。

Step 2-1 次に、$A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$のときに定理の主張が成り立つと仮定する。以降、混乱を避けるため、n次単位行列をI_n、$n-1$次単位行列をI_{n-1}と表記する。

今度は、**Claim 2** から証明しよう。$i \in \{1, 2, \ldots, n\}$をとる。$A$の第 i 行、第 i 列を取り除いた$n-1$次正方小行列を

$$A_i^- = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

と表す。このとき、$A_i \in M_{n-1}(\mathbb{R})$は、定義から$A_i^- \geq 0$であるため、帰納法の仮定より、Frobenius 根$\lambda(A_i^-) \geq 0$をもち、$\lambda(A_i^-)$に対応する固有ベクトル$\boldsymbol{x}$で、各成分が実数からなり、$\boldsymbol{x} \geq 0$であるものが存在する。さらに、$n-1$元連立 1 次方程式 (1.1.1) の係数行列$\rho I_{n-1} - A_i^-$が Hawkins-Simon の条件を満たすための必要十分条件は、$\rho > \lambda(A_i^-)$である。

$\lambda \in \mathbb{R}$を、次のように定義する。

$$\lambda = \max\left\{\max_{1 \leqq i \leqq n} \lambda(A_i^-), \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}\right\} \tag{1.2.7}$$

ここで、$\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$は常に成り立ち、$\lambda(A_i^-) \geq 0$より、$\lambda \geq 0$である。$\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$は、$A$の固有値のうち実数のもの全体を表している。もし$\sigma_p(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset$でなければ、$\lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$も成り立つ。

$\rho > \lambda$であるとき、$\rho I_n - A$が Hawkins-Simon の条件を満たすことを示そう。今、

$$\rho > \lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-) \geq \lambda(A_n^-)$$

が成立するので、$\rho I_{n-1} - A_n^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$は、帰納法の仮定から Hawkins-Simon の条件を満たす。その上、$\rho I_{n-1} - A_n^-$は$\rho I_n - A$の$n-1$次首座小行列であるから、$\rho I_n - A$の首座小行列$(\rho I_n - A)_k$に対し、

$$|(\rho I_n - A)_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

が示されたことになる。

残りは、$\rho > \lambda$のときに$|\rho I_n - A| > 0$が成り立てば、$\rho I_n - A$は Hawkins-Simon の条件を満たすことが示される。これを背理法で証明する。$|\rho I_n - A| = 0$と仮定すると、$\rho \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$である。一方、$\lambda$の定義から$\rho > \lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ となるが、これは$\rho \in \sigma_p(A)$に矛盾する。従って、$|\rho I_n - A| \neq 0$となる。

次に、$|\rho I_n - A| < 0$と仮定し、ρを固定する。定理 3 より、ある$\rho^* > \max\{0, \rho\}$が存在し、任意の$\eta \geq \rho^*$に対して、$|\eta I_n - A| > 0$である。このようなηも固定する。

ここで、Aの固有多項式$\varphi(\theta) = |\theta I_n - A|$は$\theta$に関する$n$次の多項式関数となるから、$\mathbb{R}$上で連続である。仮定より$\varphi(\rho) < 0 < \varphi(\eta)$であり、$\varphi(\theta)$は閉区間$[\rho, \eta]$上で連続であるから、中間値の定理により、ある実数$\rho < \theta^* < \eta$が存在して、$\varphi(\theta^*) = 0$となる。すなわち、$\theta \in \sigma_p(A)$である。一方、仮定より$\theta^* > \rho > \lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$であるから、$\theta^* \in \sigma_p(A)$に矛盾。従って、$|\rho I_n - A| > 0$であり、$\rho I_n - A$は Hawkins-Simon の条件を満たすことが示される。

逆に、$\rho I_n - A$が Hawkins-Simon の条件を満たすと仮定する。このとき、補題 1 より、$\rho I_n - A$から第 i 行、第 i 列を取り除いた$(\rho I_n - A)_i^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$は、任意の$i = 1, 2 \ldots, n$に対して、Hawkins-Simon の条件を満たす。また、任意の$i = 1, 2 \ldots, n$
に対して、

$$(\rho I_n - A)_i^- = \rho I_{n-1} - A_i^- \tag{1.2.8}$$

であるから、帰納法の仮定により各$i = 1, 2 \ldots, n$に対して$\rho > \lambda(A_i^-)$が成り立つ。これより、

$$\rho > \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

が従う。

次に、$\sigma_p(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ のとき、$\rho > \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ であることを、背理法を用いて示す。まず $\rho = \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$と仮定すると、$\rho \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ であるから、$|\rho I_n - A| = 0$となるが、これは Hawkins-Simon の条件 $|\rho I_n - A| > 0$ に矛盾。従って、$\rho \neq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ である。$\rho < \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ と仮定すると、定理 3 より、任意の $\eta \geq \rho$ に対して $\eta I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たす、しかし、$\eta = \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\} > \rho$とすれば、$|\eta I_n - A| = 0$となり、これは Hawkins-Simon の条件を満たさないため矛盾。従って、$\rho > \max\left\{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-), \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}\right\}$ が成り立つ。λを (1.2.7) のように定義すれば$\rho > \lambda$となるので、**Claim 2** が示された。なお、続く **Claim 1** の証明でλがAの最大固有値$\lambda(A)$と一致することが示される。

Step 2-2　続いて、**Claim 1** を示そう。この場合は$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$であり、$\lambda = \lambda(A)$が成り立ち、固有ベクトルが符号を変えないことを示せばよい。

$\mathrm{adj}\, A \in M_n(\mathbb{R})$を、行列$A$の余因子行列とする。$\rho I_n - A$の行列式を第 i 行における余因子展開を、全ての i について行えば、行列の積の定義から等式

$$(\rho I_n - A)\mathrm{adj}\,(\rho I_n - A) = |(\rho I_n - A)| I_n \tag{1.2.9}$$

が成り立つ。$\rho > \lambda$のとき、$\rho I_n - A$は Hawkins-Simon の条件を満たすため、逆行列$(\rho I_n - A)^{-1}$が存在する。逆行列は等式 (1.2.9) より

$$(\rho I - A)^{-1} = \frac{1}{|\rho I_n - A|}\mathrm{adj}\,(\rho I_n - A)$$

と表すことができる。定理 2 より $(\rho I - A)^{-1} \geq 0$、および$|\rho I_n - A| > 0$であるから、$\mathrm{adj}\,(\rho I_n - A) \geq 0$である。

ここで、$\mathrm{adj}\,(\rho I_n - A)$の$(i, j)$成分を$(\alpha_{ij}(\rho))$と表すことにすれば、余因子行列の定義から

$$\alpha_{ij}(\rho) = (-1)^{i+j} \left| (\rho I_n - A) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \right|$$

であり、$\alpha_{ij}(\rho)$はρについての$n-1$次の多項式関数となる。従って、ρについて$\mathbb{R}$上連続関数であるから、

$$\lim_{\rho \to \lambda} \alpha_{ij}(\rho) = \alpha_{ij}(\lambda)$$

が成立する。一方、$\rho > \lambda$のとき$\alpha_{ij}(\rho) \geq 0$であるから、

$$\lim_{\rho \to \lambda} \alpha_{ij}(\rho) \geq 0$$

となるため、$\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$である。従って、$\mathrm{adj}\,(\lambda I - A) \geq 0$が成り立つ。

また、固有多項式$\varphi(\rho) = |\rho I_n - A|$も、$\rho$に関する$n$次の多項式関数となり、$\mathbb{R}$ 上で連続である。$\rho > \lambda$のとき、

条件 1 より $\varphi > 0$ であるから、

$$\lim_{\rho \to \lambda} \varphi(\rho) = \varphi(\lambda) \geq 0$$

が成り立つ。すなわち、$|\lambda I_n - A| \geq 0$ である。

$|\lambda I_n - A| = 0$ となることを示そう。$\boldsymbol{e} = {}^t(1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ とする。すなわち、全ての成分が 1 のベクトルである。等式 (1.2.9) の両辺を左から掛けると、

$$(\lambda I_n - A)\mathrm{adj}\,(\lambda I_n - A)\boldsymbol{e} = |(\lambda I_n - A)|I_n\boldsymbol{e} = |(\lambda I_n - A)|\boldsymbol{e}$$

となる。ここで、$\boldsymbol{x} = \mathrm{adj}\,(\lambda I_n - A)\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{c} = |(\lambda I_n - A)|\boldsymbol{e}$ とおけば、$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ であり、

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \tag{1.2.10}$$

を満たす。さらに、$\mathrm{adj}\,(\lambda I_n - A) \geq 0$、$|\lambda I_n - A| \geq 0$ であるから、$\boldsymbol{x} \geq 0$、$\boldsymbol{c} \geq 0$ となる。

ここで、$|\lambda I_n - A| > 0$ と仮定すると、$\boldsymbol{c} > 0$、$\boldsymbol{x} \geq 0$ となり条件 2 を満たすため、$\lambda I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たすが、これは先ほど示した **Claim 2** に矛盾する。従って、$|\lambda I_n - A| = 0$ であるから、方程式 (1.2.10) は

$$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{1.2.11}$$

となるので、$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ である。

次に、$\lambda = \lambda(A)$ となることを示そう。$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ であるから、λ の定義 (1.2.7) より、

$$\lambda = \max \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$$

である。一方、再び (1.2.7) より、

$$\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

であるため、$\lambda \geq 0$ となる。従って、λ は $A \in M_n(\mathbb{R})$ の非負固有値のうち最大のものであるから、$\lambda = \lambda(A)$ が成り立つ。

次に、$\lambda = \lambda(A)$ に対する固有ベクトルが符号を変えないことを示す。

Case 1 $\boldsymbol{x} \neq 0$ のとき、$\boldsymbol{x}$ は方程式 (1.2.11) の解であるから、$\boldsymbol{x}$ は $\lambda \in \sigma_p(A)$ に対する固有ベクトルの一つとなる。一方、$\boldsymbol{x}$ の成分 $x_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ を表すと、$\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ であるから、

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$$

となるため、$\boldsymbol{x} \geq 0$ が成り立つ。

Case 2 $\boldsymbol{x} = 0$ のとき、$\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルではない。$\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ であるから、

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\lambda) = 0$$

より、$\alpha_{ij}(\lambda) = 0\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ となる。これは、$\mathrm{adj}\,(\lambda I_n - A)$ の全ての成分が 0 であることを意味する。

また、$|\lambda I_n - A| = 0$ であるから、その階数 $\mathrm{rank}\,(\lambda I_n - A) \leq n - 1$ となる。すなわち、ある $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在して、第 k 行の各成分 $\lambda\delta_{kj} - a_{kj}\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ が、その他の行の成分を用いた 1 次結合で表せる。これは、行基本変形を行い第 k 行の各成分を 0 とすること、すなわちその他の行の成分の定数倍と、それらの和を用いて、第 k 行の各成分と同じ値をつくることができることと同値である。すなわち、$p_k = 0$ を満たす n 個の係数

$p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$を用いて

$$\lambda\delta_{kj} - a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} p_i(\lambda\delta_{ij} - a_{ij}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

と表せる。

また、$\mathrm{adj}\,(\lambda I_n - A) = \boldsymbol{O}$であるから、$\lambda I_n - A$の全ての余因子が0、特に、$(\lambda I_n - A)_i^-$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$に対して、

$$|\lambda I_{n-1} - A_i^-| = 0$$

が成り立つ。すなわち、$\lambda \in \sigma_p(A_i^-)(i = 1, 2, \ldots, n)$である。一方、帰納法の仮定により、$A_i^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$はFrobenius根$\lambda(A_i^-)$が存在して、$\lambda \leq \lambda(A_i^-)$が成立する。すなわち、

$$\lambda \leq \min_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

一方、λの定義 (1.2.7) より、$\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$でもあるので、

$$\lambda = \lambda(A_i^-) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

であることがわかる。

また、帰納法の仮定によりFrobenius根$\lambda = \lambda(A_k^-)$に対応する固有ベクト$\boldsymbol{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$で、$\boldsymbol{x} \geq 0$となるのものが存在する。すなわち、

$$(\lambda I_{n-1} - A_k^-)\boldsymbol{y}^* = 0 \tag{1.2.13}$$

である。ここで、$\boldsymbol{y}^* = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$と表せば、方程式 (1.2.13) の$n-1$個の行について、それぞれ形式的に$y_k = 0$とおけば、等式

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\delta_{ij} - a_{ij})y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n) \tag{1.2.14}$$

を得る。これらは左辺が0であるから、(1.2.12) で定めた係数$\{p_i\}_{i=1}^n$を、各$i = 1, 2, \ldots, n$に対して掛け算すると、

$$p_i \sum_{j=1}^{n} (\lambda\delta_{ij} - a_{ij})y_j = \sum_{j=1}^{n} p_i(\lambda\delta_{ij} - a_{ij})y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

を得る。この$\boldsymbol{y}^*$の各成分$\{y_i\}_{\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}}$を用いて、

$$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。このとき、$\boldsymbol{y}$は$\boldsymbol{y} \geq 0$である。

$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$が$\lambda \in \sigma_p(A)$の固有ベクトルであることを示そう。$(\lambda I_n - A)\boldsymbol{y}$を各行について展開し、全て0となることを示せばよい。n個の行のうち、$i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$については、$y_k = 0$となっていることに注意すれば、等式 (1.2.14) より、

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda\delta_{ij} - a_{ij})y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n)$$

が得られる。従って、残る$i = k$行については、等式 (1.2.12) より、

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}(\lambda\delta_{kj}-a_{kj}) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}p_i(\lambda\delta_{ij}-a_{ij})\right)y_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}p_i(\lambda\delta_{ij}-a_{ij})y_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}0 = 0\end{aligned}$$

以上より、$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$は最大固有値$\lambda=\lambda(A)$ $(A\in M_n(\mathbb{R}))$に対する$\boldsymbol{y}\geq 0$の固有ベクトルである。

□

注意 3 定理 4 により、定理 2 の 4 つの条件と同値の条件がさらに一つ加わったことになる。すなわち、$\rho I_n - A$が Hawkins-Simon の条件を満たすことと、$\rho>\lambda(A)$が同値となる。

また、この章では$A\in M_n(\mathbb{R})$に対し、非負行列という条件以外は何も付けていないことに注意しよう。$A\in M_n(\mathbb{R})$が既約という性質を用いると、Perron-Frobenius の定理においてより強力な主張が成り立つ。このことは第 1.3 節において詳しく解説する。

定理 4（Perron-Frobenius の定理）より、以下の系が導かれる。

系 1 Frobenius 根について、次の 4 つの主張が成り立つ。

Claim 1 非負値ベクトル$\boldsymbol{y}\geq\boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0})$と、非負行列$A\in M_n(\mathbb{R})$、ある実数$\rho$に対して、$A\boldsymbol{y}\geq\rho\boldsymbol{y}$ならば、$\lambda(A)\geq\rho$。

Claim 2 Aの任意の（一般には複素数の）固有値をωとすれば、$\lambda(A)\geq|\omega|$。

Claim 3 $A_1,A_2\in M_n(\mathbb{R})$が、$A_1\geq A_2\geq 0$を満たすならば、$\lambda(A_1)\geq\lambda(A_2)$。

Claim 4 $\lambda(A)=\lambda({}^tA)$。

ここで、複素数$\omega=\omega_1+i\omega_2$ $(\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R})$に対して、$|\omega|\in\mathbb{R}$を$|\omega|:=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$と定める。つまり、複素数平面上での$\omega$と原点の距離を$|\omega|$と表す。これは、実数の絶対値の自然な拡張である。

Proof. **Claim 1** を示す。

仮定より、$A\boldsymbol{y}\geq\rho I_n\boldsymbol{y}$であるから、$(\rho I_n-A)\boldsymbol{y}\leq 0$である。もし$\rho>\lambda(A)$であれば、定理 4 より、$\rho I_n-A$は Hawkins-Simon の条件を満たす。従って、定理 2 より、逆行列$(\rho I_n-A)^{-1}$が存在して、$(\rho I_n-A)^{-1}\geq 0$である。従って、不等式 (1.2.15) の両辺に$(\rho I_n-A)^{-1}$を掛ければ、

$$(\rho I_n-A)^{-1}(\rho I_n-A)\boldsymbol{y}\leq(\rho I_n-A)^{-1}\cdot 0 \iff \boldsymbol{y}\leq 0$$

となり、$\boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{0}$となり、$\boldsymbol{y}\geq 0$ $(\boldsymbol{y}\neq 0)$に矛盾する。

Claim 2 を示す。

仮定より、$\omega\in\sigma_p(A)$であるから、一般に$\omega\in\mathbb{C}$であることに注意すると、

$$A\boldsymbol{z}=\omega\boldsymbol{z}$$

となる固有ベクトル$\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^n$が存在する。$\boldsymbol{z}={}^t(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ $(z_i\in\mathbb{C})$とおくと、$i=1,2,\ldots,n$に対して、

$$\omega z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$$

が成立する。従って、両辺の絶対値を取れば、各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して、不等式

$$|\omega z_i| = |\omega||z_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||z_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|z_j|$$

を得る。ここで、$\hat{z} = (|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|) \in \mathbb{R}^n$ とおくと、$\hat{z} \geq 0\ (\hat{z} \neq \mathbf{0})$であり、$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|z_j|$ は$A\hat{z}$の第 i 行であるから、

$$A\hat{z} \geq |\omega|\hat{z}$$

となり、**Claim 1** より、$\lambda(A) \geq |\omega|$となる。

Claim 3 を示す。$\lambda(A_2)$に対する固有ベクトル$\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$で$\boldsymbol{x}_2 \geq 0$となるものを取る。このとき、$A_1 \geq A_2 \geq 0$であるから、この両辺に$\boldsymbol{x}_2 \geq 0$を掛ければ、

$$A_1\boldsymbol{x}_2 \geq A_2\boldsymbol{x}_2$$

を得る。一方、$\lambda(A_2) \in \sigma_p(A_2)$であるから、$A_2\boldsymbol{x}_2 = \lambda(A_2)\boldsymbol{x}_2$が成り立つので、

$$A_1\boldsymbol{x}_2 \geq \lambda(A_2)\boldsymbol{x}_2$$

従って、**Claim 1** より、$\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$となる。

Claim 4 を示す。

任意のn次正方行列の行列式は、その転置行列の行列式と等しい。従って、

$$|\lambda I_n - A| = |{}^t(\lambda I_n - A)| = |\lambda I_n - {}^tA|$$

となるから、Aの固有方程式$|\lambda I_n - A| = 0$と${}^tA$の固有方程式$|\lambda I_n - {}^tA| = 0$は完全に一致する。従って、$\sigma_p(A) = \sigma_p({}^tA)$であるから、$\lambda(A) = \lambda({}^tA)$が満たされる。

1.3. 既約な行列と Perron-Frobenius の定理

1.3.1. 既約な行列の定義とその性質

この章では、行列に既約という性質を導入する。既約な非負行列Aに対しては、Perron-Frobenius の定理においてより強い主張が成り立つ。特に、Frobenius 根$\lambda(A)$に対応する任意の固有ベクトルが、ある正の固有ベクトル$\boldsymbol{x} > 0$の定数倍となることは、特筆すべきであろう。この事実について証明を述べるが、まずは非負なn次正方行列に対する可約な行列と、そうでない行列である既約な行列を定義しよう。

定義 3　$A \in M_n(\mathbb{R})$を非負行列とし、添字集合を$\Lambda = \{1, 2, \ldots n\}$とする。行列$A$が**可約**である、もしくは分解可能であるとは、Λの部分集合$K, L \subset \Lambda\ (K, L \neq \emptyset)$で、$K \cup L = \Lambda$、$K \cap L = \emptyset$を満たし、$i \in K$かつ$j \in L$となる全ての組$(i, j)$に対して

$$a_{ij} = 0$$

となるものが存在することをいう。可約でない行列を、**既約**である、もしくは分解不能であるという。

以降、ある集合Aの要素の個数を、$n(A)$で表すこととする。また、

補題 2　$A \in M_n(\mathbb{R})$を非負行列とする。添字集合を$\Lambda = \{1, 2, \dots n\}$とし、$\Lambda$の部分集合を$K$、$L$とし、$n(L) = s$とする。このとき、$A$が可約となることと、行または列の順番を入れ替える正則行列（これを置換行列という）Pが存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

となることは同値である。ここで、$A_{11} \in M_s(\mathbb{R})$ 、$A_{22} \in M_{n-s}(\mathbb{R})$、$A_{12}$は$s$行、$n - s$列の行列であり、これらは全て非負行列である。

Proof. Aが可約であると仮定する。このとき、Λの部分集合$K, L \subset \Lambda \ (K, L \neq \emptyset)$で、$K \cup L = \Lambda$、$K \cap L = \emptyset$を満たし、$i \in K$かつ$j \in L$となる全ての組$(i, j)$に対して$a_{ij} = 0$となるものが存在する。ここで、$L \subset \Lambda$の要素を小さい数から順に$i_1 . i_2, \dots, i_s$

とし、$K \subset \Lambda$の要素を小さい数から順に$i_1^*, i_2^* \dots, i_{n-s}^*$とする。すなわち、$\{i_p\}_{p=1}^s$、$\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$はそれぞれ

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n, \quad 1 \leq i_1^* < i_2^* < \cdots < i_{n-s}^* \leq n$$

を満たし、$\{i_p\}_{p=1}^s$、$\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$の合計n個の数を昇順に並べたら、$1, 2, \dots, n$となる。また、K、Lの定義から、$\{i_p\}_{p=1}^s \cup \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \{1, 2, \dots, n\}$ 、$\{i_p\}_{p=1}^s \cap \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \emptyset$であり、可約の条件から

$$\begin{pmatrix} a_{i_1^* i_1} & \cdots & a_{i_1^* i_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{n-s}^* i_1} & \cdots & a_{i_{n-s}^* i_s} \end{pmatrix} = O$$

である。ここで、列基本変形（右基本変形）の定義により、行列Aの列の順列を$(1, 2, \dots, n)$から$(i_1, i_2, \dots, i_s, i_1^*, i_2^*, \dots, i_{n-s}^*)$に並べ替える置換行列$P$が存在し、入れ替えた行列は$AP$で表される。さらに、行列$A$の行の順列を$(1, 2, \dots, n)$から同じく$(i_1, i_2, \dots, i_s, i_1^*, i_2^*, \dots, i_{n-s}^*)$に入れ替える置換行列は同じ$P$であり、入れ替えた行列は$PA$である。さらに、この置換行列$P$は$n$次単位行列の第 i 列と第 j 列を入れ替えた基本行列P_{ij}のいくつかの積で表され、$P_{ij}^{-1} = P_{ji} = P_{ij}$である。従って、$P = P^{-1}$であるから、これらを組み合わせると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_s} & a_{i_1 i_1^*} & \cdots & a_{i_1 i_{n-s}^*} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_s} & a_{i_2 i_1^*} & \cdots & a_{i_2 i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s i_1} & a_{i_s i_2} & \cdots & a_{i_s i_s} & a_{s i_1^*} & \cdots & a_{s i_{n-s}^*} \\ a_{i_1^* i_1} & a_{i_1^* i_2} & \cdots & a_{i_1^* i_s} & a_{i_1^* i_1^*} & \cdots & a_{i_1^* i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{n-s}^* i_1} & a_{i_{n-s}^* i_2} & \cdots & a_{i_{n-s}^* i_s} & a_{i_{n-s}^* i_1^*} & \cdots & a_{i_{n-s}^* i_{n-s}^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

となる。なお、ここまでの操作は行と列の入れ替えを行っているのみであるから、$A_{11} \geq 0$、$A_{12} \geq 0$、$A_{22} \geq 0$である。

逆に、非負行列Aに対して、ある置換行列Pが存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

を満たすと仮定する。このとき、$A_{11} \in M_k(\mathbb{R})$、$A_{22} \in M_l(\mathbb{R})$とすれば、両辺に左から$P$、右から P^{-1}を掛ければ、

$$A = P \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる。これらは並べ替えただけであり、行列の成分は変化していないため、Aは可約であるための条件を満たしている。

□

ここで、ベクトル$\boldsymbol{x}$の全ての成分$x_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$が正ではない、すなわち（1 つとは限らない）ある j が存在して、$x_j \leq 0$となるとき、$\boldsymbol{x} \not> 0$と表すこととする。

次の重要な補題を証明する。

補題 3　非負行列$A \in M_n(\mathbb{R})$が可約であることと、ある実数$\rho \in \mathbb{R}$と、ある非負ベクトル$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$で$\boldsymbol{x} \not> 0$ 、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$を満たすものが存在して、 $A\boldsymbol{x} \leq \rho\boldsymbol{x}$となることは同値である。

Proof. まず、非負行列$A \in M$が可約であれば、補題 2 より、Aの行と列を入れ替えるある置換行列Pが存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

を満たす。$A_{11} \in M_k(\mathbb{R})$、$A_{22} \in M_l(\mathbb{R})$であるとする。$A_{11} \geq 0$であるから、$A_{11}$ に対する Frobenius 根$\lambda(A_{11})$が存在し、対応する固有ベクトル$\boldsymbol{y}_1 \in \mathbb{R}^s$で$\boldsymbol{y}_1 \geq 0$を満たすものが存在する。すなわち、

$$A_{11}\boldsymbol{y}_1 = \lambda(A_{11})\boldsymbol{y}_1.$$

ここで、 $\boldsymbol{y}_1 = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_s)$と書くとき、$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$を

$$\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_s, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-s\text{ 個}})$$

とおく。このとき、

$$P^{-1}AP\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(A_{11})\boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \lambda(A_{11})\begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \lambda(A_{11})\boldsymbol{y}$$

ゆえに、置換行列Pを左側から掛ければ、

$$AP\boldsymbol{y} = \lambda(A_{11})P\boldsymbol{y}$$

となる。$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$とおけば、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda(A_{11})\boldsymbol{x}$$

である。すなわち、$\rho \geq \lambda(A_{11})$とおけば、$A\boldsymbol{x} \leq \rho\boldsymbol{x}$である。さらに$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{y}$の成分の順番を入れ替えたものであるから、$\boldsymbol{x} \geq 0$であり、$\boldsymbol{x} \not> 0$ 、$\boldsymbol{x} \neq 0$を満たすベクトルとなる。

逆に、ある実数 $\rho \in \mathbb{R}$ と、ある非負ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$で、 $\boldsymbol{x} \not> 0$、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を満たすものが、 $A\boldsymbol{x} \leq \rho\boldsymbol{x}$ と

なると仮定する。$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$と表すことにする。$L := \{j \in \mathbb{N} : x_j > 0\}$とおくと、$\boldsymbol{x} \not> 0$であるから、$L \subsetneq \{1, 2, \ldots, n\}$である。一方、$\boldsymbol{x} \geq 0$かつ$\boldsymbol{x} \neq 0$より、$L \neq \emptyset$である。

ここで、$K := \{j \in \mathbb{N} : x_j = 0\}$とすると、$K \cup L = \{1, 2, \ldots, n\}$かつ$K \cap L = \emptyset$ となる。不等式$A\boldsymbol{x} \leq \rho\boldsymbol{x}$を展開して行ごとに記述すれば、第$i$行は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \rho x_i$$

となる。ここで、$i \notin L$すなわち、定義より$i \in K$のとき、$x_i = 0$であるから、

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 0$$

となるが、$A \geq 0$、$\boldsymbol{x} \geq 0$であるから、全ての項において$a_{ij} x_j = 0$ 。さらに、$j \in L$のときは、 $x_j > 0$であるから、$a_{ij} = 0 \ (i \in K, j \in L)$でなければならない。$K$、$L$の条件より、これは$A = (a_{ij})$が可約であることの定義に他ならない。

□

ここまでで、既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理がより強い結果を導くことが証明できるための道具が準備できた。

1.3.2.　既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理

定理 5（既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理）非負行列$A \in M_n(\mathbb{R})$が既約な行列であるとする。このとき、Frobenius 根は$\lambda(A) > 0$となり、$\lambda(A)$に対応する正の固有ベクトル$\boldsymbol{x} > 0$が存在する。しかも、任意の固有ベクトルはこの$\boldsymbol{x}$の定数倍になる。

注意 4　ここでの定数倍とは、注意 1 でも述べたように複素数倍を含めたものである。つまり、$\lambda(A)$に対応する任意の固有ベクトルは、全て$\boldsymbol{x} > 0$の複素数倍$\mu\boldsymbol{x} \ (\mu \in \mathbb{C})$の形で記述される。このような固有値$\lambda(A)$を単純固有値とよぶ。このことは、$\mu$の虚部が 0 である、つまり$\mu \in \mathbb{R}$のとき、固有ベクトルの成分は全て実数となり、$\mu$の虚部が 0 でない、つまり$\mu$が虚数のときは、全て虚部が 0 でない複素数となることを表している。すなわち、任意の固有ベクトル$\mu\boldsymbol{x}$の成分においては実数と虚数が混ざらないことを意味している。

Proof. 定理 4 より、$\lambda(A)$に対応する任意の非負の固有ベクト$\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$を取ると、$A\boldsymbol{x} = \lambda(A)\boldsymbol{x}$を満たす。この時、補題 3 より、$\boldsymbol{x} \not> 0$、$\boldsymbol{x} \neq 0$であると仮定すると、$A$は可約な行列となるが、これは$A$が既約な行列であることに矛盾する。従って、$\boldsymbol{x} > 0$である。次に、 $\boldsymbol{y} = {}^t(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$を、$\lambda(A)$に対応する任意の固有ベクトルとする。$\boldsymbol{y}$の各成分$y_j \in \mathbb{C} \ (j = 1, 2, \ldots, n)$を、実部$s_j \in \mathbb{R}$、虚部$t_j \in \mathbb{R}$に分けて、

$$y_j = s_j + t_j i$$

と表すことにする。ここで、 i は虚数単位を表す。この実部、虚部をまとめたベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{s} = {}^t(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$、$\boldsymbol{t} = {}^t(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$と表すことにする。このとき$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s} + i\boldsymbol{t}$と表すことができ、$\boldsymbol{y}$が$\lambda(A)$に対する固有ベクトルであるから、

$$A(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}i) = \lambda(A)(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}i),$$

すなわち、

$$(\lambda(A)I_n - A)\boldsymbol{s} + (\lambda(A)I_n - A)\boldsymbol{t}i = 0$$

となるので、実部と虚部がそれぞれ固有方程式 (1.2.4) を満たす。従って、$\boldsymbol{y}$の実部$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{y}$の虚部$\boldsymbol{t}$もまた$\lambda(A)$に対応する固有ベクトルである。

はじめに、$\boldsymbol{y}$の実部$\boldsymbol{s}$が$\boldsymbol{x} > 0$の定数倍で表されることを示そう。定数$\mu_1 \in \mathbb{R}$を

$$\mu_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{s_j}{x_j}$$

とおく。このとき、$\mu_1 \leq s_j/x_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ が成立するので、$s_j - \mu_1 x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ が成立し、$s_{j^*} - \mu_1 x_{j^*} = 0$ を満たす $j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$ が存在する。故に、$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{s} - \mu_1 \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とおくと、$\boldsymbol{z}_1 \geq 0$、$\boldsymbol{z}_1 \not> 0$ を満たす。さらに$\boldsymbol{z}_1$は、

$$A\boldsymbol{z}_1 = A(\boldsymbol{s} - \mu_1 \boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{s} - \mu_1(A\boldsymbol{x}) = \lambda(A)\boldsymbol{s} - \mu_1 \lambda(A)\boldsymbol{x} = \lambda(A)(\boldsymbol{s} - \mu_1 \boldsymbol{x}) = \lambda(A)\boldsymbol{z}_1$$

を満たす。従って、$\boldsymbol{z}_1 \neq 0$ と仮定すると、再び補題 3 より、Aが可約な行列となるが、これは矛盾である。よって、$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{0}$ であるから、任意の固有ベクトル$\boldsymbol{y}$の実部$\boldsymbol{s}$は、$\boldsymbol{s} = \mu_1 \boldsymbol{x}$ と表される。

全く同様にして、$\boldsymbol{y}$の虚部$\boldsymbol{t}$が$\boldsymbol{x} > 0$の定数倍で表されることが示される。すなわち、任意の固有ベクトル$\boldsymbol{y}$の虚部$\boldsymbol{t}$は、μ_1と同様に定める定数

$$\mu_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{t_j}{x_j}$$

を用いて、$\boldsymbol{t} = \mu_2 \boldsymbol{x}$ と表される。故に、$\mu = \mu_1 + \mu_2 i$ とおくと、

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}i = \mu_1 \boldsymbol{x} + \mu_2 \boldsymbol{x} i = (\mu_1 + \mu_2 i)\boldsymbol{x} = \mu \boldsymbol{x}$$

となるので、任意の固有ベクトル$\boldsymbol{y}$は、$\boldsymbol{x} > 0$の複素数を含む定数倍$\mu\boldsymbol{x}$で表せる。

□

なお、定理 4 より導かれた系 1 はAが非負行列であればよく、既約であるかどうかは関係がない。Aが既約な行列であれば、定理 5 より、さらに次のことが導かれる。

系 2 **Claim 1** $A \in M_n(\mathbb{R})$が非負で既約な行列であるとする。ある$\boldsymbol{x} \geq 0$に対して、$(\rho I - A)\boldsymbol{x} \geq 0$ならば、$\rho I - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たす。

Claim 2 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が非負で既約な行列であるとする。$\rho I - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、$(\rho I - A)^{-1} > 0$となる。

Proof. **Claim 1** を示す。

${}^t A$についての固有値問題 (1.2.3) を考える。

$${}^t A\boldsymbol{p} = \lambda({}^t A)\boldsymbol{p}$$

仮定よりAが既約であるから、その並び替えの${}^t A$もまた既約である。したがって、定理 5 より、Frobenius 根$\lambda({}^t A)$に対応する正の固有ベクトル$\boldsymbol{p} > 0$が存在する。この固有値問題の両辺の転置をとると、

$${}^t\boldsymbol{p}^t\left({}^t A\right) = {}^t\boldsymbol{p}^t \lambda({}^t A)$$

となる。ここで、${}^t({}^tA) = A$であり、$\lambda({}^tA)$は実数なので、${}^t\lambda({}^tA) = \lambda({}^tA)$である。さらに、系1より$\lambda({}^tA) = \lambda(A)$であるから、

$$ {}^t\boldsymbol{p}A = \lambda(A){}^t\boldsymbol{p} $$

が成立する。ここで仮定より、$\rho\boldsymbol{x} \geq A\boldsymbol{x}$であるから、この不等式の両辺に左から${}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} > 0$を掛けると、

$$ \rho{}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} > {}^t\boldsymbol{p}A\boldsymbol{x} = \lambda(A){}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} $$

従って、

$$ (\rho - \lambda(A)){}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} > 0 $$

となる。ところで、$\boldsymbol{x} \neq 0$であるから、$\boldsymbol{x} \geq 0$、よって、${}^t\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} > 0$となる。従って、$\rho - \lambda(A) > 0$となり、定理4より、$\rho I - A$はHawkins-Simonの条件を満たす。

Claim 2 を示す。

はじめに、任意の$\boldsymbol{c} \geq 0$に対して、$(\rho I - A)^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$とおけば、$\boldsymbol{x} > 0$となることを示す。$\rho I - A$がHawkins-Simonの条件を満たすので、定理2より、任意の$\boldsymbol{c} \geq 0$に対して、$(\rho I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$を満たす非負値解$\boldsymbol{x} \geq 0$が存在する。このとき、

$$ \rho\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \geq A\boldsymbol{x} $$

であるから、補題3より、$\boldsymbol{x} \not> 0$と仮定すると、Aが可約な行列となるので矛盾する。従って、$\boldsymbol{x} > 0$である。

次に、$(\rho I - A)^{-1}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}$であることを示す。$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$は非負値であれば任意に取れるので、任意の$j = 1, 2, \ldots, n$に対し、$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_j = {}^t(0, 0, \ldots, 0, \overset{j}{1}, 0, \ldots, 0)$とおけば、対応する解を$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j}$とすると、

$$ (\rho I - A)^{-1}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j} $$

となる。すると、$(\rho I - A)^{-1} = (\beta_{ij})$と書くことにすれば、

$$ (\rho I - A)^{-1}\boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix} $$

となるから、左辺の$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j} = {}^t(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,n})$と各成分を比較すれば、

$$ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,i} = \beta_{ij} $$

である。ここで、$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{e}_j,i} > 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$であるから、$\beta_{ij} > 0\ (i = 1, 2, \ldots, n)$となる。従って、全ての$j = 1, 2, \ldots, n$に対して同様の操作を行うことで、$\beta_{ij} > 0\ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$を得る。

$\square$

2　経済学的意味

2.1.　Hawkins-Simon の条件

2.1.1.　一次方程式系

式 (1.1.1) は、マルクス経済学において、対象化された労働量を求める式になっている。

産出を単位行列I、投入を非負の正方行列$A = (a_{ij})$として、$B = I - A$とおく。すると$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$は

$(I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$であり、これを変形すると$\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}$となる。ここで、$\boldsymbol{x}$を未知数とすれば、$\boldsymbol{c}$が各生産過程の産出１単位あたりの労働時間を示し、$\boldsymbol{x}$が各生産物の対象化された労働量を示すベクトルとなっていることが分かる。

従って、Bの非対角成分の非正条件 (1.1.2) は、投入が非負であることの結果と解釈できる。対角成分に非正条件が付されないのは、Bの対角成分は、産出からそれと同種の投入を引いた量であり、正である可能性があるからである（むしろ生産的な体系では、正でなければならない）。

マルクス経済学では、対象化された労働量の計算では投入行列に生活物資を含めないが、生産価格の計算では生活物資を含めた拡大投入行列を扱う。その技術のもとで生産物１単位の生産に必要な労働量を$\boldsymbol{l}={}^t(l_1,l_2,...,l_n)(\geqq 0)$、労働１時間あたりの生活物資を$\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,...,d_n)(\geqq 0)$とおくと、拡大投入行列$A^+$は次のように書ける。

$$A^+=A+\boldsymbol{ld}$$

生活物資は非負なので、拡大投入行列の各成分は、もとの投入行列の各成分よりも大きくなるが、Bの非対角成分の非正条件 (1.1.2) に反することはない。従って、第 1.1 節での数学的議論は、投入行列だけでなく、拡大投入行列を扱う理論分野にもそのまま適用することができる。

2.1.2.　Hawkins-Simon の条件

この条件は、経済学では純生産可能条件と呼ばれる。このことを２部門のモデルで示そう。２部門の投入行列は、産出を単位行列として、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

となる。行は部門（生産物の種類）を表す。ここで、第２部門は産出の規模を自由に変更でき、産出規模に応じて投入は比例的に変化するものとする。第２部門の産出規模を$s(>0)$とすると、第１財の純生産量は$1-(a_{11}+sa_{21})$、第２財の純生産量は$s-(a_{12}+sa_{22})$となる。[2]

純生産が可能であるということは、第１財、第２財ともに純生産量が正であるということである。$1-(a_{11}+sa_{21})>0$より、$1-a_{11}>sa_{21}$。$s>0,a_{21}\geqq 0$より、$1-a_{11}>0$。これはBの１次首座小行列式が正であることに相当する。

続いて$s-(a_{12}+sa_{22})>0$より、$s(1-a_{22})>a_{12}$。以下a_{12}が非負であることに注意して場合分けをする。

・$a_{12}=0$の場合。

$s(1-a_{22})>0$。$s>0$より$1-a_{22}>0$。$1-a_{22}>0$なので、$(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$となる。これは$B$の２次首座小行列式が正であることに相当する。

[2] 投入行列の転置を取ってから計算すると、第１章の計算と一致する。

・$a_{12} > 0$の場合。

$s(1-a_{22}) > a_{12}, 1-a_{11} > sa_{21}$より、

$$\frac{a_{21}}{1-a_{11}} < \frac{1}{s} < \frac{1-a_{22}}{a_{12}}$$

従って

$$\frac{a_{21}}{1-a_{11}} < \frac{1-a_{22}}{a_{12}}$$

であり、これを整理すると$(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$。これは$B$の 2 次首座小行列式が正であることに相当する。

つまり、Bが Hawkins-Simon の条件を満たすということは、それに相当する技術体系のもとでは、部門間の産出規模の比率を適当に調整すれば、純生産が可能であることが意味されている。

2.1.3.　Hawkins-Simon の条件と非負値解

式 (1.1.1) は、対象化された労働量を求める式と解釈することができるから、Hawkins-Simon の条件が条件 3（方程式 (1.1.1) は、任意の非斉次項$\boldsymbol{c} \geqq 0$に対して、非負値解$\boldsymbol{x} \geqq 0$を持つ）と同値であるということは、Hawkins-Simon の条件が満たされるとき、対象化された労働量はマイナスにはならないということを含意する。従って（条件 1 ⇒条件 3）が経済学的には最も重要な意義をもつ。

2.1.4.　Hawkins-Simon の条件と逆行列の非負値性

（条件 1 ⇒条件 4）＝（Hawkins-Simon の条件⇒方程式 (1.1.1) の係数行列$B=(b_{ij})$は、全ての成分が非負である逆行列B^{-1}を持つ）は、「マルクスの基本定理」の証明に用いられる。

「マルクスの基本定理」は、労働者に対する搾取と利潤の発生が同値であるという定理である。経済学的な含意としては、搾取⇒利潤より、利潤⇒搾取の証明の方が重要度が高い。搾取は、労働による剰余の発生と同義であるから、その場合に剰余の価格表現であるところの利潤が発生することはむしろ当然である。しかし逆に、利潤が生まれている場合には必ず、それが自然の恵みや機械の効率性の恩恵に還元されることはなく、労働にその根源があるという方は、ある種の直観に反するからである。

この後者の、利潤⇒搾取の証明の際に、Hawkins-Simon の条件を満たす行列は非負逆行列をもつということが必要になる。この部分さえクリアされれば、「マルクスの基本定理」の証明は非常にシンプルである。

行列を用いた「マルクスの基本定理」の証明はどこにでも載っているので、ここでは、逆行列の非負値性を本質的には用いながら、明示的には行列を使わずに証明する方法を 2 部門モデルで示す。

・2 部門での「マルクスの基本定理」の証明

対象化された労働量を求める式は、次のように書ける。

$$\begin{cases} t_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + l_1 & (2.1.1) \\ t_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + l_2 & (2.1.2) \end{cases}$$

ただし、$a_{ij}(i,j=1,2)$は先の投入行列の成分と同じもので、従って非負であり、また純生産可能条件、つまり $1-a_{11}>0$ かつ $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$を満たしているものとする。なお、$t_i(i=1,2)$は対象化された労働量を表す。

さらに、$w(>0)$を労働1時間当たりの賃金率、$p_i(i=1,2)$を価格として、「マルクスの基本定理」は次のように書ける。なおここでは生活物資$d_i(i=1,2)$は正とする。

マルクスの基本定理：2部門 ver.

$$1 > d_1t_1 + d_2t_2 \tag{2.1.3}$$

これは次の不等式と同値である。

$$\begin{cases} p_1 > a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1w & (2.1.4) \\ p_2 > a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2w & (2.1.5) \end{cases}$$

ただし

$$d_1p_1 + d_2p_2 = w \tag{2.1.6}$$

式 (2.1.3) は、労働1時間に対して、労働1時間で得られる生活物資に対象化された労働時間が満たないことを意味する。ここではそれを搾取と呼ぶ。

式 (2.1.4, 2.1.5) については、それぞれの不等式の右辺が原価、左辺が売値を表す。売値が原価より高いということは、利潤が出るということを意味することになる。

十分条件（搾取がなされている（式 (2.1.3)）ならば利潤が存在する（式 (2.1.4, 2.1.5)））の証明

式 (2.1.3) を仮定する。このとき、$p_1,p_2>0$で、式 (2.1.4, 2.1.5) を満たすp_1,p_2を見つければよい。式 (2.1.1, 2.1.2) は純生産可能条件を満たすので、$t_1,t_2>0$となる式 (2.1.1, 2.1.2) の解t_1,t_2が存在する。これを用いて、$t_1=p_1,t_2=p_2$とおけば、式 (2.1.1), (2.1.2) に代入すると

$$\begin{cases} p_1 & = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1 \\ p_2 & = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2 \end{cases}$$

が得られる。式 (2.1.3) および式 (2.1.6) より、$w<1$。従って

$$\begin{cases} p_1 & > a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1w \\ p_2 & > a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2w. \end{cases}$$

必要条件（利潤が存在する（式 (2.1.4, 2.1.5) ならば搾取がなされている（式 (2.1.3)）の証明

式 (2.1.1, 2.1.2) の両辺にwをかけたものをそれぞれ式 (2.1.4, 2.1.5) に代入し、$l_iw(i=1,2)$を消去して整理すると、

$$\begin{cases} (1-a_{11})(p_1-t_1w) > a_{12}(p_2-t_2w) & (2.1.7) \\ \qquad a_{21}(p_1-t_1w) < (1-a_{22})(p_2-t_2w) & (2.1.8) \end{cases}$$

となる。

p_1-t_1w と p_2-t_2w とが両方とも正であることを背理法で示す。

・$p_2-t_2w=0$ と仮定

式 (2.1.7) より $(1-a_{11})(p_1-t_1w)>0$。純生産可能条件より $1-a_{11}>0$。従って $p_1-t_1w>0$。

式 (2.1.8) は、$a_{21}(p_1-t_1w)<0$ となる。$p_1-t_1w>0$ のため、$a_{21}<0$ であるが、これは a_{ij} が非負であることと矛盾。

従って $p_2-t_2w\neq 0$ 。

・$p_2-t_2w<0$ と仮定

式 (2.1.7, 2.1.8) は、

$$\begin{cases} \dfrac{p_1-t_1w}{p_2-t_2w}<\dfrac{a_{12}}{1-a_{11}} \\ \dfrac{p_1-t_1w}{p_2-t_2w}>\dfrac{1-a_{22}}{a_{21}} \end{cases}$$

となり、従って

$$\frac{1-a_{22}}{a_{21}}<\frac{a_{12}}{1-a_{11}}.$$

ところで、純生産可能条件より $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$。これを変形すると

$$\frac{1-a_{22}}{a_{21}}>\frac{a_{12}}{1-a_{11}}$$

となり矛盾。

従って、$p_2-t_2w\neq 0$ と合わせて、$p_2-t_2w>0$。

・$p_1-t_1w=0$ と仮定

式 (2.1.7) は $0>a_{12}(p_2-t_2w)$ となる。上までで $p_2-t_2w>0$ なので、$a_{12}<0$ だが、a_{ij} が非負であることと矛盾。

従って $p_1-t_1w\neq 0$。

・$p_1-t_1w<0$ と仮定

純生産可能条件より $1-a_{11}>0$ なので、$(1-a_{11})(p_1-t_1w)<0$。他方、a_{ij} は非負であり、$p_2-t_2w>0$ なので、$a_{12}(p_2-t_2w)\geqq 0$。しかしこれは式 (2.1.7) に矛盾。

従って、$p_1-t_1w\neq 0$ と合わせて、$p_1-t_1w>0$。

ここまでの背理法で $p_1-t_1w>0, p_2-t_2w>0$ が示された。続いて、d_1, d_2 はいずれも正なので、

$$d_1(p_1-t_1w)>-d_2(p_2-t_2w)$$

となる。これを変形すると

$$d_1p_1 + d_2p_2 > d_1t_1w + d_2t_2w.$$

定義より $w = d_1p_1 + d_2p_2$ のため、これを用いて

$$1 > d_1t_1 + d_2t_2.$$

□

$p_i - t_iw$ は、w で割ると $p_i/w - t_i$ となる。これは支配労働量と投下労働量の差である。従って、上の証明では、支配労働量が投下労働量を上回ることは、搾取の発生・利潤の発生と同値であることも同時に証明されている。

「マルクスの基本定理」において $(I - A)^{-1}$ が非負であるということは、経済学的には支配労働量 > 投下労働量であることを保証するものである。

2.2.　Perron-Frobenius の定理

2.2.1.　Frobenius 根

上でみたように、産出を単位行列 I 、投入を非負の正方行列 $A = (a_{ij})$ として、$B = I - A$ とおいたとき、方程式 (1.1.1) は、対象化された労働量を社会的再生産のモデルのうちに求める式になっている。このことが理解されれば、方程式 (1.2.1) の ρ は、すべての部門の産出を等倍にするということが分かる。

さらに、Hawkins-Simon の条件が純生産可能条件だとすると、定理 3 は、特定の正の値の ρ^* より産出が大きくなれば、純生産可能条件が満たされるということを含意している。問題は、そのような ρ^* が存在するかどうかであるが、これが Perron-Frobenius の定理の中で、非負固有値のうち最大のものとして与えられることになる。

定理 3 は、Perron-Frobenius の定理の証明の中で、クリティカルな部分で用いられている。定理 3 の経済学的意味を以上のように確認しておくと、証明プロセスをたどりやすくなる。

2.2.2.　固有値問題

産出を単位行列 I 、投入を非負の正方行列 $A = (a_{ij})$、一般的利潤率を r とする。式 (1.2.3) において、$\lambda = 1/(1 + r)$ とすると、

$$A\boldsymbol{x}(1 + r) = I\boldsymbol{x}$$

となる。A を拡大投入行列と解釈すると、これは $\boldsymbol{x}$ を価格ベクトルとして、一般的利潤率を与える生産価格を求める式になっている。つまり、式 (1.2.3) において、A の固有値は一般的利潤率、固有ベクトルは価格を与える。

前節で述べられているように、固有方程式は λ についての n 次の方程式であるから、重解を許せば解が n 個あり、複素数も解に含まれる。これでは、一般的利潤率や価格を決定する式として、式 (1.2.3) を用いることはできない。この問題を解決し、式 (1.2.3) を価格の決定に用いることを可能にするのが、Perron-Frobenius の定理である。

2.2.3.　Perron-Frobenius の定理

定理 4 の Claim 2 の経済学的意味から説明する。Claim 2 における ρ は、産出の規模を表す。$\rho = 1$ とすれば、全部門で産出が 1 単位あたりに揃えられたことになる。これに伴い、投入行列 A の成分も、産出 1 単位あたりの

値となる。

このとき$1 > \lambda(A)$であり、上で見たようにAの固有値は利潤率$1/(1+r)$に相当するから、これは$r > 0$を意味する。つまり Claim 2 は、全部門で産出が 1 単位あたりに揃えられている社会的再生産の体系に、Perron-Frobenius の定理を適用すると、正の一般的利潤率の存在が保証されるということを意味している。

しかしこの定理 4 では、非負固有値のうち最大のものを一般的利潤率を与える固有値としてとってきても、それに対応する固有ベクトルが価格を一意に定めるものとは言えない。というのも、定理 4 の Claim 1 では、最大固有値$\lambda(A)$に対応する固有ベクトルとして、実数かつ非負の成分をもつものが存在するとしか述べられておらず、これが唯一の価格ベクトルを与えるかどうかは保証されていないからである。

しかも、Claim 1 に示される固有ベクトルは非負であることしか言われていないので、0 の成分が含まれうる。これでは価格が 0 の生産物がありうることになってしまう。

従って、定理 4 では、式 (1.2.3) が価格を決定する式として使えることはまだ保証されない。一般的利潤率が正になる可能性が言われているだけである。

Perron-Frobenius の定理を、価格の一意性を保証するものとして使うためには、さらに追加の条件が必要である。その条件が、投入行列Aが既約であるということである。

2.3.　既約な行列と Perron-Frobenius の定理

投入行列Aが既約であるということは、経済学的には投入行列に奢侈品が含まれないことを意味する。

ここでいう奢侈品は、すべての生産物にとって直接的または間接的に生産手段になる生産物以外の生産物のことである。投入行列 Aが可約であるとは、置換行列Pが存在し、次のように書けることを意味するのであった。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

このとき、A_{22}が投入となる生産物は、A_{22}として自身の生産手段になっているだけでなく、A_{12}として別種の生産物の生産手段にもなっており、直接間接にすべての生産物の生産手段になっている。それに対して、A_{11}とA_{12}で生産される生産物は、A_{22}のみで生産される生産物の生産手段にはならない。従って、A_{11}とA_{12}で生産される生産物は奢侈品に分類される。

奢侈品が存在する場合でも、その奢侈品が過度に自己再生産的（この意味はすぐ説明する）でなければ、特に経済学的には問題にならない。非奢侈品の投入産出関係が既約の投入行列となるので、そこに定理 5（既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理）が適用されて、価格と一般的利潤率が一意に決定される。その後、一般的利潤率が奢侈品の利潤率にも適用され、それにしたがって奢侈品の価格が決定される。[3]

しかし奢侈品の生産過程が、自らの産出を割合として多く投入に必要とするような、自己再生産的な過程であるとき、上のような手順をたどることに問題が生じる。2 次の数値例で確認しよう。産出を単位行列として、投入行

[3] 小幡（2009）p.194。

[4] Sraffa(1960) 付録 B。

列を

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

とおく。この場合固有値は $0.6, 0.8$ であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ $s_1(-1,2), s_2(1,0)$（s_i は実数）となる。Perron-Frobenius の定理どおり、最大固有値に対応する固有ベクトルは非負になっているが、どちらの固有ベクトルも価格ベクトルとしては適当でない。

Perron-Frobenius の定理を適用するなら、一般的利潤率としては最大固有値をとるべきだが、それは上で見た手順に合致しない。上の手順にしたがうと、非奢侈品である第 2 財が体系全体の利潤率を規定し、一般的利潤率は 2/3（固有値 0.6 に相当）になる。しかし、奢侈品である第 1 財が、1 単位の産出に投入として自分自身を 0.8 単位必要とするため、価格が非負である限り、1/4（固有値 0.8 に相当）以上の利潤率は実現できない。

それでも一般的利潤率を 2/3 にしようとするならば、負の価格を許容する必要がある。この数値例の第 1 財は、スラッファの「豆」のケースに相当する[4]。

他方、最大固有値にしたがって一般的利潤率を定めると 1/4 となるが、このときは第 2 財の価格が 0 になる。それでは第 2 財は生産されないだろう。

この問題は、奢侈品の自己再生産度が高く、価格が非負の範囲で達成できる最大の利潤率が、非奢侈品が規定する利潤率よりも低いために発生する。これが先に「過度に自己再生産的」といった意味である。どちらの方が高くなるかは一般的には言えないため、この問題を回避するために、奢侈品を排除した既約の行列を考えることになるわけである。

既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理である定理 5 は、定理 4 の Claim 1 が書き換わったものである。これにより、最大固有値に対応する正の固有ベクトルが存在し、かつ任意の固有ベクトルはその定数倍になるとされる。価格ベクトルとしては、異なる 2 つの成分の比率だけが重要なので、任意の固有ベクトルが特定のベクトルの定数倍になるということは、価格ベクトルとしては唯一に定まったと言ってよい。

こうして、式 (1.2.3) が、価格を決定する方程式として用いうることが、Perron-Frobenius の定理によって支えられている。以上のように非常に重要な定理なので、これに関しても、マルクス経済学でよく用いられる 2 部門モデルで、行列を用いない証明を以下で与えておく。

・2 部門での Perron-Frobenius の定理の証明

生産価格、すなわち p_1 と p_2 の比を求める式は、次のように書ける。

$$\begin{cases} p_1 = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)(1+r) & (2.3.1) \\ p_2 = (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)(1+r) & (2.3.2) \end{cases}$$

ただし $a_{ij}(i,j=1,2)$ は、生活物資を加えた拡大投入行列の係数となっているものとし、非負であり、純生産可能条件 $1-a_{11}>0$ かつ $(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$ を満たしているものとする。

Perron-Frobenius の定理：2 部門 ver.

4 Sraffa(1960) 付録 B。

Claim 1 式 (2.3.1, 2.3.2) は、$1/(1+r)=\lambda$として、p_1, p_2の比と λ について 2 つの組み合わせを解として与えるが、奢侈品がない場合、λの解のうち大きい方は非負であり、それに対応する p_1, p_2の比は正。

Claim 2 $\lambda<1$。

式 (2.3.1, 2.3.2) は、$1/(1+r)=\lambda$として、

$$\begin{cases}(\lambda-a_{11})p_1-a_{12}p_2=0 & (2.3.3)\\ -a_{21}p_1+(\lambda-a_{22})p_2=0 & (2.3.4)\end{cases}$$

と表せる。これが $p_1=p_2=0$という自明な解以外の解をもつとすると、

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})=a_{12}a_{21} \tag{2.3.5}$$

が成り立つ。

まず Claim 1 を示そう。このためには、奢侈品がない、つまり投入行列が既約であるという条件が必要であった。2 次の場合、それはa_{12}, a_{21}がともに正であるという条件になる。

$a_{12}a_{21}>0$ のため、式 (2.3.5) より、$\lambda-a_{11}$ と $\lambda-a_{22}$ の符号は同じになる。式 (2.3.3, 2.3.4) より、$\lambda-a_{11}<0, \lambda-a_{22}<0$のとき p_1, p_2の比は負、$\lambda-a_{11}>0, \lambda-a_{22}>0$のとき p_1, p_2の比は正になる。

ここで式 (2.3.5) の解のうち、$\lambda-a_{11}<0, \lambda-a_{22}<0$をみたすものを$\lambda^-$、$\lambda-a_{11}>0, \lambda-a_{22}>0$をみたすものを$\lambda^+$とすると、$\lambda^-<a_{11}, \lambda^-<a_{22}, \lambda^+>a_{11}, \lambda^+>a_{22}$。従って$\lambda^+>\lambda^-$。さらに$a_{11}, a_{22}$は非負なので、$\lambda^+\geqq 0$。

従って、式 (2.3.5) の解のうち大きい方は非負であり、それに対応する価格比率は正となる。

□

次に Claim 2. を示す。

純生産可能条件より$(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}>0$なので、式 (2.3.5) より、
$(1-a_{11})(1-a_{22})>(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})$。ここで$\lambda\geqq 1$と仮定すると、
$\lambda-a_{11}\geqq 1-a_{11}, \lambda-a_{22}\geqq 1-a_{11}$で、$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\geqq(1-a_{11})(1-a_{22})$となり矛盾。
従って$\lambda<1$。

□

参考文献

Sraffa, Piero. (1960) *Production of Commodities by means of Commodities*, Cambridge at the University Press.
小幡道昭（2009）『経済原論』東京大学出版会。
二階堂副包（1961）『経済のための線型数学』培風館。