

COMMONS vol.4

『コモンズ』



- | | | |
|-------|-------|--|
| 査読論文 | 02-14 | The Rise of Craft Specialization in Ancient Japan:
Quantitative Insights into Prehistoric Pottery Standardization
James Frances Loftus |
| | 15-31 | ポール・リクールにおける贈与としての赦し——与える者と受け取る者の間で
大田 彩香 |
| 研究ノート | 32-66 | Hawkins-Simonの条件とPerron-Frobeniusの定理
永原 健太郎、江原 慶 |
| | 67-68 | 投稿規程 |
| | 69-70 | 委員会規定 |

Title

古代日本における物質文化専門化の進展： 先史時代土器標準化の定量的研究

Name

James Frances Loftus¹

抄録

先史時代の社会において、土器生産は社会や文化の変化を反映し、生産体制や専門化の進展は遺物の形状に表れることが広く知られている。近年、計算・デジタル技術の進歩により、形状変化を定量的に分析することができ、先史社会における生産組織に関する新たな知見を得ることが可能となった。本研究では、幾何学的形態計測法を用いて、弥生時代初期から前期（紀元前 900/800 年～紀元前 300 年）の調理用土器（甕形土器）の生産変化を検討した。この時期は、農耕社会への移行、水田耕作の拡大、人口増加、社会階層の形成といった大規模な社会的変化が特徴的である。分析の結果、甕形土器の形状のばらつきが減少する傾向が確認され、生産が家庭レベルから、より専門化された小規模グループによる体系的な生産体制へと移行した可能性が示唆された。また、甕形土器と壺型土器の標準化の度合いの違いは、用途や生産率が物質文化専門化に与えた影響を明らかにしている。本研究の成果は、古代日本における人口動態や社会構造の変化が生産体制に与えた影響を明らかにするとともに、各時代や地域の生産活動を比較分析するための重要な基盤を提供するものである。

キーワード：日本考古学、土器生産技法、計算・デジタル的考古学、幾何学的形態測定学的分析、弥生時代

¹ 准教授 東京科学大学 リベラルアーツ研究教育院

E-mail: JamesFrancesLoftusIII@gmail.com

住所：152-8550 東京都目黒区大岡山 2-12-1 W9-30

Title

The Rise of Craft Specialization in Ancient Japan: Quantitative Insights into Prehistoric Pottery Standardization

Name

James Frances Loftus¹

Abstract

In prehistoric societies, pottery production often mirrored changes in sociocultural landscapes, with shifts in production organization and specialization reflected in the shapes of artifacts. Modern computational and digital methods in archaeology allow us to analyze these shape variations quantitatively, providing insights into production organization in prehistoric contexts. This study utilizes geometric morphometric analysis to investigate changes in pottery production of cooking pots during the Initial ~ Early Yayoi period (~900/800 BC–300 BC) in Japan, a pivotal era marking the transition toward an agricultural society. As wet-rice farming spread across the Hakata Bay region, population growth led to significant social transformations, including the development of social hierarchies. Results show a clear trend toward reduced variability in vessel shapes, suggesting a shift to more structured production practices and heightened standardization. Differences in standardization between cooking jars and mortuary vessels highlight the impact of function and rate of production on craft specialization. These findings contribute to our understanding of how demographic and social changes influenced production organization in prehistoric Japan, providing a model for analyzing production organization across different contexts and periods.

Keyword: Japanese Archaeology, Pottery Production Techniques, Computational & Digital Archaeology, Geometric Morphometric Analysis, Yayoi Period

¹Associate Professor, Institute for Liberal Arts, Institute of Science Tokyo

E-mail: JamesFrancesLoftusIII@gmail.com

Postal Address: W9-30, Institute of Science Tokyo, Ookayama 2-12-1, Tokyo 152-8550, Japan

1 Introduction

In order for material cultural lineages to be successfully passed down, there must be a learning process where individuals acquire the skills needed to replicate the general shape or adhere to the basic 'rules' for each object within the bounds of cultural norms. Thus, the act of creating material culture functions as both a direct and indirect method of transmitting cultural norms to individuals (González-Ruibal, 2012, p. 21). This was particularly true of pottery, an essential part of daily life, which required certain necessary skills to produce. With expanding agriculture and increasingly complex social structures, it is hypothesized that pottery production methods likely transitioned from small household-based activities to more organized forms of production that could supply a growing population. In doing so, the variability of the shape of pottery likely fell, with production units favoring (consciously or unconsciously) more standardized shapes.

This study focuses on quantifying these changes in pottery production through geometric morphometric analysis (GMM), investigating how potential shifts in production methods are reflected in the shape and standardization of pottery from the Initial ~ Early Yayoi period in the Hakata Bay region, Japan. By examining changes in variability and standardization, this study aims to clarify how production methods evolved in response to demographic and societal changes during this early agricultural era in Japan.

2 Material Culture Production Organization

The organization of pottery production operates on multiple levels, where 'social learning strategies' combine with production structures, ranging from household-based workshops to specialized, small-group settings and large-scale industry. Hansen (1979) emphasizes that knowledge transmission is essential to the perpetuation of every culture and the structure of all human societies. In this sense, learning serves as a cornerstone of societal organization, with shifts in learning approaches impacting social structures, both past and present. In pottery production, social learning generally involves three key participants: instructors, models, and learners. Instructors guide learners using specific pedagogical tools to direct their attention toward set goals, while learners employ various methods to acquire and apply new skills (Loftus, 2022b). These combined tools and learning methods form what we term "social learning strategies." Each strategy varies in the time and effort required; in general, more intensive approaches result in products that more closely replicate those made by the instructor, leading to lower variability among artisans (see Fig. 1, 'A'). As a result, production environments that require high standardization often favor structured transmission methods to maintain consistency.

In this context, pottery production 'organization' reflects the degree of specialization and standardization expected within a community. Household-based production, for instance, may exhibit greater variability due to the informal, flexible nature of learning, whereas specialized workshops tend to adopt more formalized learning strategies to achieve uniformity in output (Fig. 1, 'B'). This relationship between production structure and learning strategy suggests that as pottery production transitions from individual households to specialized groups, the social learning mechanisms adapt accordingly to support consistency and specialization.

In the context of pottery production, variability in shape often reflects both conscious and unconscious decisions made within a socio-cultural framework that emphasizes the preservation of a particular “style” to uphold social identity. Variability can therefore serve as an indicator of the underlying learning strategies, as well as the production organization. While high variability might indicate a looser, household-based learning structure, low variability is often associated with structured, specialized production. Recently developed quantitative methods now enable us to measure and analyze this variability, providing insights into the production and organization of prehistoric pottery.

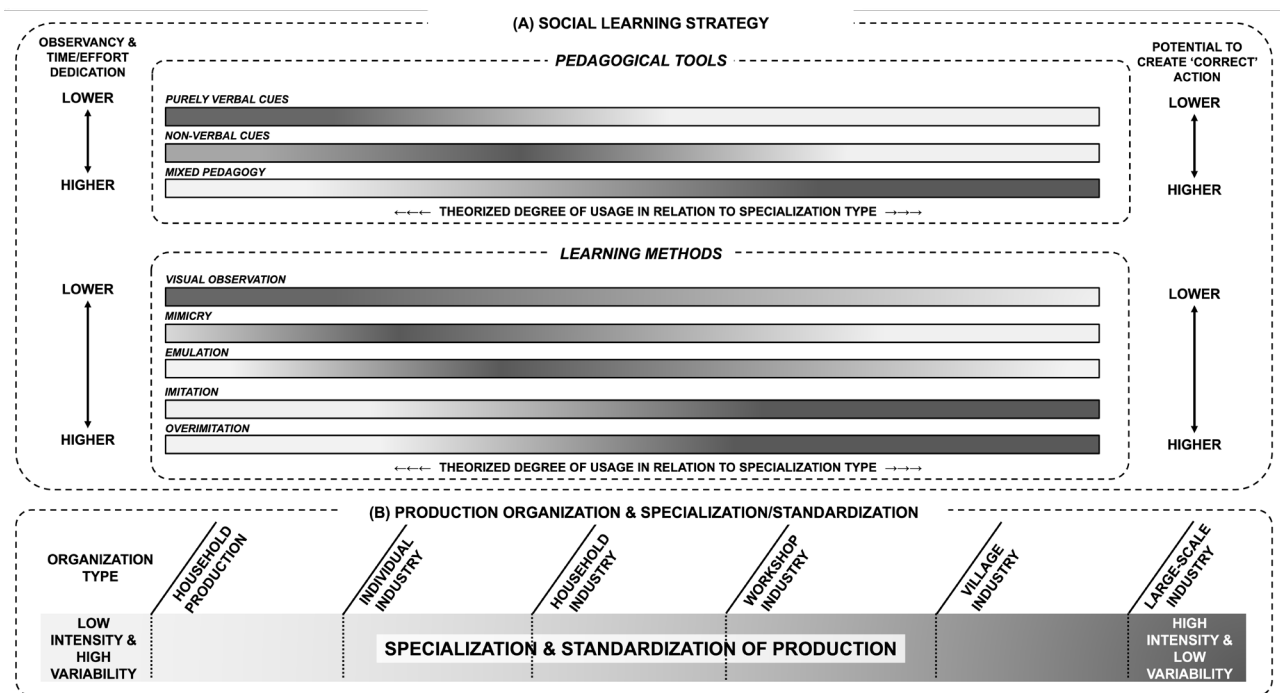


Figure 1. Theoretical framework outlining the complex relationships between differential social learning strategies, organization type and standardization of material culture (Revised from Loftus, 2022b)

3 Quantifying Production Organization through Material Culture

“Specialization”, or the ratio of producers to consumers, refers to the spectrum of production contexts within which material culture is crafted. This spectrum ranges from individual production for personal use to large-scale regional production (Fig. 1). In essence, specialization measures the ratio between the producers of a craft and its consumers (Loftus, 2022a). “Standardization” in ceramic studies quantifies this specialization by assessing the uniformity of the produced items, typically reflecting a production process that uses limited materials and follows a formalized routine (Arnold & Nieves, 1992, p. 93). In other words, more formalized means of teaching/learning will likely produce material cultural artifacts which are more similar to one another, despite being produced by different individuals.

Ethnoarchaeological research indicates that individuals within a particular socio-cultural context tend to produce material culture that mirrors that context due to learned behaviors (Ingold, 2001). This phenomenon is highlighted by Terashima & Hewlett (2016), who explain that craftspeople often create goods resembling those

of their instructors. Costin (1991) notes that “degrees of material cultural stability can result in recognizable patterns of past societies”. Pottery serves as an exemplary case of this, given its complex cognitive processes and extended learning period, which, when guided, results in fewer errors and clearly delineates social styles through form (Gandon et al., 2020; Roux, 2019). By integrating ethnographic and archaeological evidence of standardization, it is hypothesized that different specialization types employ distinct social learning strategies, evident in the material culture, particularly pottery shapes.

The analysis of ceramic shapes, independent of size (considering size yields ‘form’), is foundational in archaeology. Detailed quantitative shape analysis can reveal changes in production organization, levels of elite control, and individual variability in shape creation. Degrees of “standardization”, or the relative consistency in shapes (Bai, 2022), helps quantify variability, reducing personal bias (Longacre et al., 1988; Arnold, 2000). This study uses Geometric Morphometrics (GMM) to measure differential standardization to extrapolate relative degrees of specialization in production organization. Cooke and Terhune describe GMM as a toolkit for multivariate analysis and visualization of Cartesian coordinate data (Cooke & Terhune, 2015). Modern GMM studies fall into three categories: traditional GMM, landmark-based GMM, and outline-based GMM. Many studies on pottery complexity favor 2D outline-based GMM, processing pottery drawings into usable data through Elliptical Fourier (EFA) and Principal Component Analysis (PCA) scores. These scores facilitate significance testing, dimensionality reduction, distribution analysis, and relative rate of production (ROP) extraction, thereby gauging relative standardization.

4 Prehistoric Case Study – The Initial ~ Early Yayoi Period (BC 900/800~300), Hakata Bay Region, Island of Kyushu, Japan

The onset of the Initial ~ Early Yayoi period (弥生時代早期・前期) (around 900/800 BC to 300 BC) signifies the roots of an increasingly intensive wet-rice agricultural society in Japan. This era is notable for the gradual spread of wet-rice agriculture, which dramatically altered Japan’s social, economic, and cultural framework. The transition from a hunter-gatherer existence during the Jomon period (縄文時代) to an agrarian lifestyle prompted the formation of more stable communities (Mizoguchi, 2013, p. 53), improvements in farming techniques, the rise of social hierarchies, and most relevant to this study, shifts in material culture production methods, as seen through evident changes in the organization of labor activities (Mizoguchi, 2013, p. 54). During the Yayoi period, new technologies, such as metal tools and distinct pottery styles, were introduced, enabling more effective farming and food storage solutions. These innovations paved the way for the complex societies that would develop in later periods of Japanese history. Previous studies on social learning and production organization tell us that modern hunter gatherers often learn through “observation and imitation” with “little or no instruction from teachers” (Terashima & Hewlett, 2018, p. 314). Contrast this to agricultural societies where social learning seems to take on more rigid and clearly defined steps. As such, the early Yayoi, as a transitional period, is a potentially fruitful case study of changes in production organization in prehistoric humans.

The period features a variety of pottery shapes, each serving different purposes in the society and the daily lives of the people living in the Hakata Bay region (博多湾) on the island of Kyushu in the south of Japan. For example, some vessels are used primarily for cooking, others for serving, and others in mortuary contexts, with many scholars of the Yayoi period dedicating years to studying the morphological differences between these and their relationship with agricultural society (such as Misaka, 2022). The Hakata Bay region is widely recognized as one of the initial contact zones between the native hunter-gatherers and incoming migrant populations (Misaka, 2014). The “Yayoi” culture took root in the Hakata Bay region during this period and subsequently spread throughout western Japan (Miyamoto, 2016, 2017) – meaning that a recognizable cultural tradition should have been established in the material culture of the time. This cultural consolidation should be evident in the standardization of pottery vessels, a topic not yet thoroughly examined in previous literature. Therefore, this study focuses on this critical Hakata Bay region to explore potential changes in pottery standardization and associated production organization. This study employs a morphological stage system, dividing the period into three major phases: (Stage 1 = Yuusu style (BC 900/800-500), Stage 2 = Itazuke 1 style (BC 500-400), Stage 3 = Itazuke 2 style (BC 400-300)).

5 Materials & Methods

5.1 Materials: Hakata Bay region ‘Kame’ Cooking Jars

In earlier investigations, Loftus (2021, 2022a) observed a significant trend towards the standardization of mortuary pottery during the early Yayoi period in this region, suggesting potential shifts in social learning strategies. However, ‘tsubo’ mortuary vessels (壺型土器) were not the predominant ceramic types of this era, as they primarily served as storage and funerary containers. Consequently, standardization of these pots might have lagged behind that of more commonly used vessels, with increased production likely emerging later in the period.

To examine differences in pottery standardization practices between two shape types, this study focuses on the most prevalent pottery form from this period and region: the “kame” cooking jar (甕型土器). The kame was handcrafted using clay slabs, without the aid of pottery wheels, and fired at low temperatures in open flames, without kilns (Misaka, 2022). Its production was seemingly predominantly a household activity, with no evidence of specialized “workshops” at this time (Mizoguchi, 2013). The kame displays complexity in its evolving shape over time, influenced by concurrent indigenous and Korean Peninsula ‘Mumon’ (in Japanese, ‘Mumon’ 無文土器) tradition production methods (Hashino, 2018). Additionally, there were at least two stages of hybridization in form during this period (Loftus, 2022b). Nonetheless, the kame can be generally categorized into two major types: carinated/cordoned and smoothly rounded (Fig. 2). This study employs a subset of samples openly available from Loftus (2022b), analyzing 200 complete vessels from the Hakata Bay region.



Figure 2. Carinated/cordoned (left) and smoothly rounded 'Kame' cooking jars from the Hakata Bay region. 3D photos taken by the author, with permission from the housing institute, the Fukuoka City Archaeological Research Center (福岡市埋蔵文化財センター).

5.2 Statistical Methods: Geometric Morphometrics (GMM)

This study utilizes the aforementioned '2D outline-based geometric morphometrics' as the base of data presented. GMM is a toolkit of different computational analysis in the extrapolation and visualization of differential shape in archaeological artifacts. Specifically, this study utilizes the following workflow:

- 1) Data Collection: High-fidelity photocopy of site report line drawings (600 DPI); conversion to binary (black and white) pallet.
- 2) Contour Extraction: Elliptical Fourier Analysis ('R' package 'MOMOCS') (Bonhomme, Picq, Gaucherel, & Claude, 2014; R Core Team, 2020, v3.6.3); Size factors removed from counterclockwise traced contour data.
- 3) Dimensionality Reduction: Contour data fed into PCA; PC scores extracted for further quantitative statistical testing (first three PCs).
- 4) Significance Testing: PC scores utilized to test statistical significance using MOMOCS; Significance tested between temporal stages (the main goal of this study).

5.3 Data Availability Statement

The minimal data set (PC scores) which supports the findings presented in this study will be made available upon reasonable request to the corresponding author.

5.4 Ethics Statement

This study primarily utilizes 2D outline data of archaeological artifacts published in openly accessible archaeological site reports from the Northern Kyushu region of Japan. No unpublished data was utilized in this study. Furthermore, no destructive analysis was conducted in this study. No living descendant groups have any ongoing claims to the data or original artifacts presented in this study. All data is securely stored by the corresponding author, and no data is linked to any specific individual, living or otherwise.

5.5 Funding Information

This work was supported by the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) KAKENHI Grant-in-Aid for JSPS Fellows (Grant No. 22KF0305) (<https://kaken.nii.ac.jp/en/grant/KAKENHI-PROJECT-22KF0305/>) and the KAKENHI Grant-in-Aid for Research Activity Start-up (Grant No. 24K22529) (<https://kaken.nii.ac.jp/en/grant/KAKENHI-PROJECT-24K22529/>). The funders had no role in study design, data collection and analysis, decision to publish, or preparation of the manuscript.

本研究は JSPS 科研費 22KF0305（特別研究員奨励費）、24K22529（研究活動スタート支援）の助成を受けたものである。

6 Results

6.1 Significance Testing

Following the extraction of elliptical Fourier coefficients and analysis through principal component analysis (PCA), multivariate statistical significance testing was conducted to confirm that observed changes in pottery shape across temporal stages were not due to random variation. Both Wilks' Lambda and Pillai's trace showed p-values of < 0.05 , demonstrating significant temporal changes in vessel morphology (Tabachnick & Fidell, 2007). *Wilks' Lambda: df1: 6, df2: 390, F:2.144, p:0.0477; Pillai Trace: df1: 6, df2: 392, F:2.144, p:0.04771.*

Furthermore, in order to accurately assess where the above statistical significance lies between each morphological stage, pairwise comparisons of each stage are also provided. Pairwise comparisons revealed that although the morphology between stages 1 and 2 showed no statistical significance, there was clear significance between stages 2 and 3, suggesting that more major shifts in production standardization likely occurred in the latter part of the period. *Pairwise Comparisons: Stage 1-2:p=0.30977, Stage 1-3:p=0.023982, Stage 2-3:0.047914.*

6.2 Kame Variability (Fig. 3)

Fig. 3: A: Variability in Kame shape falls within the upper half of vessels, with PC1 (51.8% of total variance)

directly representing the general openness of the mouths of vessels, and degree of curvature of the vessel necks. PC2 (18.7%) represents more clearly the lips of kame vessels, especially the degree of outward curvature of lips relative to the neck. PC3 (9.09%) is represented primarily by the width of the base of vessels. PC1-3 represent 79.59% of the total shape variability in all examined kame vessels, with remaining PCs showing less than 7% of total variance displayed. The latter are not included in this study as they fall below the often-utilized threshold of ~10% variability of each PC.

Fig. 3: B: When considering the first two PCs which are above the ~10% threshold, there is a clear trend towards a gradual process of shape standardization (at least within the upper halves of vessels which hold the largest amount of variability). PC1 over the three examined temporal stages shows a relatively compact spread of variability, with stage 3, despite a general lack of samples during this period, showing both a morphological shift (as expressed by the average line moving) and the peak of distribution becoming more pronounced. PC2 on the other hand, shows a marked change in morphological distribution between stage 1 and 2, with a clear central grouping of samples into a higher peak, but flattens out again into a more varied shape in stage 3. It is possible that some variability became apparent again in this latter period, or that the lack of samples in this period is skewing the results slightly. Regardless, the general trend seems to be a gradual reduction of morphological variability.

Fig. 3: C: PCA morphospace tells a similar story to that of PC distribution, with 95% confidence ellipses slowly shrinking in their breadth over the three periods, and with stage 1 vessels showing a relatively wide range of variability in the morphospace among all four quadrants. On the other hand, stage 3 vessels seem to group in the left two quadrants primarily, and are represented by less angular, and more “curvy” vessels – this would align well with previous results of typo-chronologies presented by Loftus (2022b).

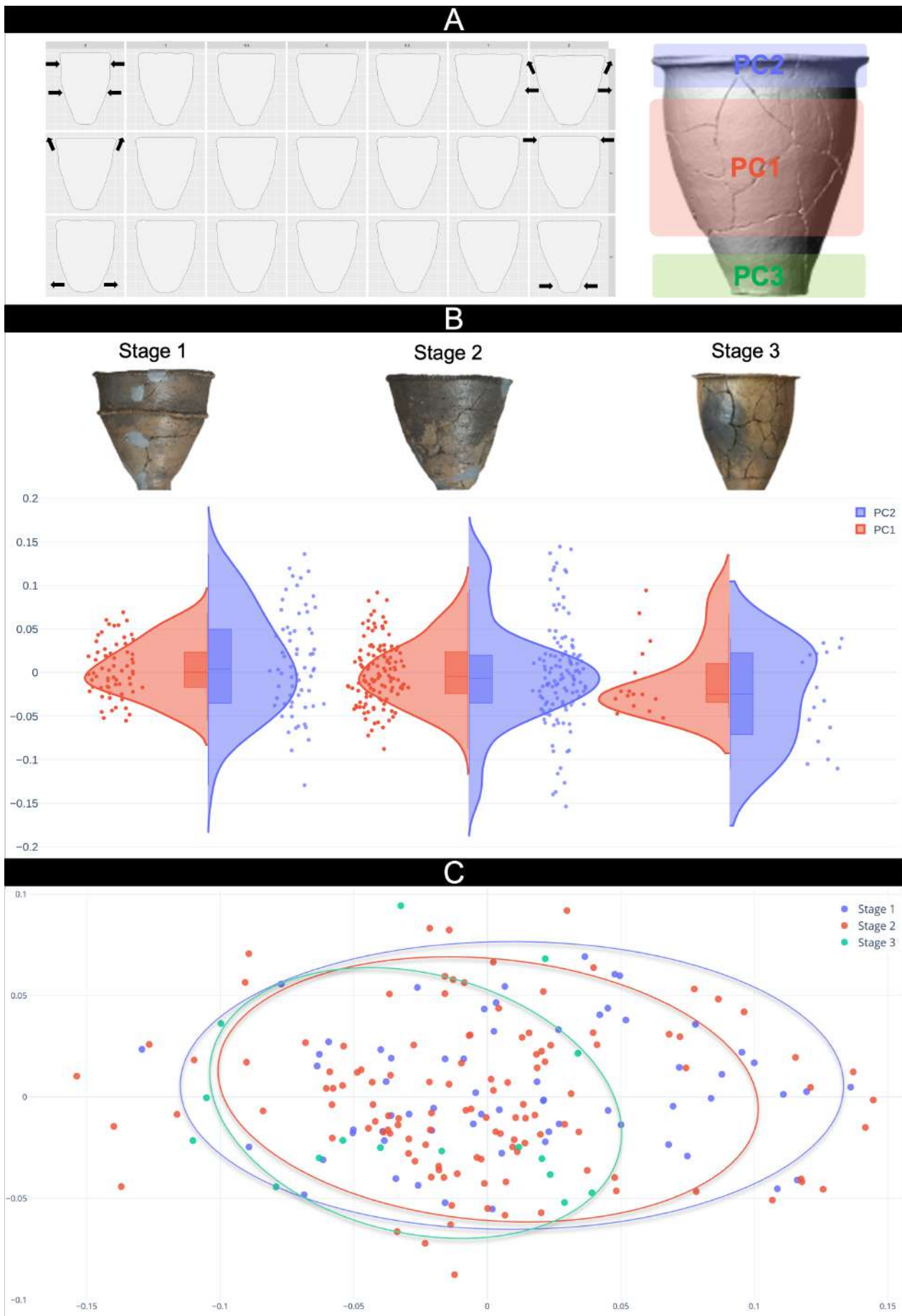


Figure 3. Results of Geometric Morphometric analysis on 'kame' cooking pots. A: Summary of shape variation along PC axes (PC1–3) of kame outlines, utilizing the 'PCcontrib' function; B: Box plot distribution with overlaid violin plots of PCA scores (PC1, 2) over the three temporal periods; C: Principal component morphospace plot of PC1 (x axis) and PC2 (y axis) between the three temporal periods (stages 1, 2, 3).

7 Discussion

During the early Yayoi period, significant population growth and migration in the Hakata Bay region introduced diverse groups with distinct pottery traditions and techniques (Usami, 2020). While this diversity might initially suggest an increase in pottery shape variability due to the integration of various styles, the evidence instead reveals a trend toward standardization (lessening of variation). This trend suggests that as population demands grew, communities adopted new strategies to ensure consistent production. The increased need for reliable pottery likely prompted a shift from household-based production to small-group units where experienced potters trained others, leading to uniformity.

The observed standardization despite population growth and migration suggests that potters and their communities implemented intentional strategies to control variability and maintain consistency in pottery production. Centralizing production and formalized learning allowed communities to scale up pottery production efficiently, meeting the demands of a growing population without sacrificing quality. Typically, when specialization of production is achieved and a set number of potters are able to focus on production alone, a larger number of more specialized pots are able to be created in a comparatively short amount of time. Standardized pottery shapes could have reinforced cultural identity and cohesion within communities, especially in the context of integrating diverse migrant groups. When focusing on the Hakata Bay region in particular, a clearer picture of differential standardization emerges, contrasting with the broader Northern Kyushu region (北部九州地方) as previously analyzed by Loftus (2022b). The cooking jars from the Hakata Bay region exhibited a much quicker standardization process than those from other regions, aligning with the understanding that the majority of population increase occurred in the Hakata Bay region (Miyamoto, 2016). This demographic shift played a critical role in shaping the pottery production landscape, significantly impacting social learning strategies and related production organization.

A contrast exists between the standardization of cooking jars and mortuary vessels (Loftus 2022a) within the Hakata Bay region. Cooking jars demonstrated a relatively consistent shape from the beginning of the period, gradually becoming more standardized over time. This contrasts with mortuary vessels, which began with higher variability but standardized more rapidly (Loftus 2022a). The difference in standardization practices can be attributed to the distinct functions and production intensities of these vessel types. Cooking jars were essential for daily use, necessitating consistent and reliable production to meet everyday needs. This demand for uniformity likely drove early standardization, as potters aimed to produce functional and reliable vessels efficiently. In contrast, mortuary vessels, primarily used for storage and funerary purposes, were produced less frequently and with more variability initially. What drove the rapid standardization of mortuary vessels will need to be explored in further studies.

Despite these insights, it is essential to recognize that this standardization pattern may not be universal across the Japanese archipelago. Different regions might have adopted agricultural practices and specialized production at varying rates, with some groups selectively integrating new technologies or cultural traits (Crema, Stevens, & Shoda, 2022). This process of “choosing” cultural traits continued well into the following ‘Kofun’ period, with evidence of outlying island cultures having continued extremely unique cultural trends such as

cranial modification for hundreds of years (Seguchi, Loftus, Yonemoto, & Murphy, 2023).

While this study contributes new understanding to the organization and specialization of pottery production in early Yayoi society, certain limitations should be considered. The study's reliance on geometric morphometric analysis, while effective in assessing shape variability and standardization, may not fully account for other factors such as resource availability, technological constraints, or cultural preferences for specific design elements. Moreover, the focus on pottery shape alone might provide an incomplete view of production dynamics, as additional factors like raw material sourcing and production techniques also play significant roles. Finally, while the findings suggest a link between demographic shifts and production organization, the exact causal mechanisms remain speculative. Future research that includes a broader range of archaeological data—such as raw material analysis, regional comparisons, and assessments of manufacturing techniques—could provide a more holistic view of production dynamics during the early Yayoi period.

8 Conclusions

This study examined pottery production organization during the early Yayoi period in the Hakata Bay region, utilizing geometric morphometric analysis to quantify standardization as a marker of craft specialization. The results reveal a trend toward reduced variability in pottery shapes, particularly in cooking jars, suggesting a shift from household-level production to more organized small-group production units as agricultural practices expanded. This transition aligns with demographic changes, such as population growth and the establishment of social hierarchies, which likely drove the need for efficient and standardized production methods. Differences in the standardization of cooking jars and mortuary vessels further highlight the role of function and production intensity in shaping craft specialization during this period.

To further elucidate the relationship between production organization and pottery standardization, future research should focus on comparing pottery assemblages with varying production rates within the same shape type. This would help isolate the effects of production intensity on standardization, providing a clearer understanding of how social learning strategies evolved in response to changing socio-economic conditions. Also, while the notion of differential usage based on shape-type affecting standardization was explored in this study, further work needs to be done to extrapolate how possible differential production methods (Jomon or Korean Mumun-influenced) could have affected the standardization noted.

The findings presented in this study underscore the importance of pottery standardization as an indicator of social change, enhancing our understanding of how early Japanese farming communities adapted production organization in response to demographic pressures and changes in societal structures. These insights could also extend beyond Japan, offering a valuable framework for investigating the relationship between craft specialization and social evolution in other early agricultural societies around the world.

References

- Arnold, D. (2000). Does the standardization of ceramic pastes really mean specialization? *Journal of Archaeological Method and Theory*, 7(4), 333–375. <https://doi.org/10.1023/A:1026570906712>
- Arnold, D., & Nieves, A. (1992). Factors affecting standardization. In *Ceramic production and distribution: An integrated approach* (pp. 19–36). Westview Press.
- Bai, Y. (2022). Morphological standardization, ceramic specialization and dynamic political intervention: A case study from the Taosi site, China. *Asian Archaeology*, 6, 37–52. <https://doi.org/10.1007/s41826-022-00050-4>
- Bonhomme, V., Picq, S., Gaucherel, C., & Claude, J. (2014). Momocs: Outline analysis using R. *Journal of Statistical Software*, 56(13), 1–24.
- Cooke, S., & Terhune, C. (2015). Form, function, and geometric morphometrics. *Anatomical Record*, 298(1), 5–28. <https://doi.org/10.1002/ar.23065>
- Costin, C. (1991). Craft specialization: Issues in defining, documenting, and explaining the organization of production. *Archaeological Method and Theory*, 3, 1–56. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0070-7_1
- Crema, E. R., Stevens, C. J., & Shoda, S. (2022). Bayesian analyses of direct radiocarbon dates reveal geographic variations in the rate of rice farming dispersal in prehistoric Japan. *Science Advances*, 8(38), eadc9171. <https://doi.org/10.1126/sciadv.adc9171>
- González-Ruibal, A. (2012). Archaeology and the study of material culture: Synergies with cultural psychology. In J. Valsiner (Ed.), *The Oxford handbook of culture and psychology* (pp. 132–162). Oxford University Press.
- Gandon, E., Nonaka, T., Ender, J. A., Coyle, T., & Bootsma, R. J. (2020). Traditional craftspeople are not copycats: Potter idiosyncrasies in vessel morphogenesis. *PLOS ONE*, 15(9), e0239362. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0239362>
- Hansen, J. F. (1979). *Sociocultural perspectives on human learning: An introduction to educational anthropology*. Prentice-Hall.
- Harush, O., Roux, V., Karasik, A., & Grosman, L. (2020). Social signatures in standardized ceramic production: A 3-D approach to ethnographic data. *Journal of Anthropological Archaeology*, 60, 101208.
- Hashino, S. 端野 晋平 . (2018). *Shoki inasaku bunka to toraijin: Sono rütsu o saguru* [Initial rice cultivating society and migrants]. Suirensa.
- Ingold, T. (2001). From the transmission of representations to the education of attention. In H. Whitehouse (Ed.), *The debated mind: Evolutionary psychology versus ethnography* (pp. 113–153). Berg Publishers.
- Loftus, J. F. (2021). Micro-regional complexities in Yayoi pottery form as seen through morphometric statistical analysis. *Japanese Journal of Archaeology*, 9(1), 1–20. https://doi.org/10.15084/jja.9.1_1
- Loftus, J. F. (2022a). Reexamining ceramic standardization during agricultural transition: A geometric morphometric investigation of initial–early Yayoi earthenware, Japan. *Open Archaeology*, 8(1), 1249–1268. <https://doi.org/10.1515/opar-2022-0273>
- Loftus, J. F. (2022b). *Quantifying social learning strategies, pottery production organization and idiosyncratic style: A case study of the Yayoi Agricultural Transitional Period, Japan* [Doctoral dissertation, Kyushu University]. Kyushu University Doctoral Dissertation Database. <https://hdl.handle.net/2324/5068282>
- Longacre, W. A., Skibo, J. M., & Stark, M. T. (1988). Southwestern pottery standardization: An ethnoarchaeological view from the Philippines. *The Kiva*, 53(2), 101–112.
- Mizoguchi, K. (2013). *The archaeology of Japan: From the earliest rice farming villages to the rise of the state*. Cambridge University Press.
- Miyamoto, K. (2016). Archaeological explanation for the diffusion theory of the Japonic and Koreanic languages. *Japanese Journal of Archaeology*, 4(1), 1–25. https://doi.org/10.15084/jja.4.1_1
- Misaka, K. 三阪 一徳 . (2014). *Doki kara mita Yayoi jidai kaishi katei* [The commencement process of the Yayoi period as seen from pottery]. In *Rettooshoki inasaku no ninaite wa dareka* [Who was the bearer of the incipient rice agriculture in the Japanese archipelago?] (pp. 75–92). Suirensa.
- Misaka, K. 三阪 一徳 . (2022). *Doki seisaku gijutsu kara mita inasaku juyōki no tōhoku Ajia* [Technological aspects of pottery production in the rice cultivation acceptance period of Northeast Asia]. Kyushu University Press.
- R Core Team. (2020). *R: A language and environment for statistical computing* (Version 3.6.3) [Computer software]. R Foundation for Statistical Computing. <https://www.R-project.org/>
- Roux, V. (2019). *Ceramics and society: A technological approach to archaeological assemblages*. Springer International Publishing.
- Seguchi, N., Loftus, J. F., Yonemoto, S., & Murphy, M. M. (2023). Investigating intentional cranial modification: A hybridized two-dimensional/three-dimensional study of the Hirota site, Tanegashima, Japan. *PLOS ONE*, 18(8), e0289219. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0289219>
- Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S. (2007). *Using multivariate statistics*. Pearson/Allyn & Bacon.
- Terashima, H., & Hewlett, B. S. (2018). *Social learning and innovation in contemporary hunter-gatherers: Evolutionary and ethnographic perspectives*. Springer Japan.
- Usami, T. 宇佐美 智之 . (2020). *Hokubu Kyūshū Yayoi jidai zenhanki niokeru shūroku bunpu ricchi no henka: Shūroku no dōtai ni miru rettō shoki nōkō shakai no keisei katei* [Changes in settlement distribution and location patterns during the first half of the Yayoi period in northern Kyushu: The formation process of early farming societies in Japan as seen from settlement pattern changes]. *Ritsumeikan Bungaku: The Journal of Cultural Sciences*, 666, 148–162.

Title

ポール・リクールにおける贈与としての赦し ——与える者と受け取る者の間で

Name

大田 彩香

抄録

赦しは、第二次世界大戦以降、多様な領域で論争の的となってきた概念の一つである。その代表的な論者であるジャック・デリダ Jacques Derrida (1930–2004) が赦しの不可能性を主張したのに対し、非商業的な交換としての「困難な赦し」を論じ、挑戦を投げかけたのがポール・リクール Paul Ricœur (1913–2005) であった。果たしてリクールは、デリダが不可能な赦しを主張する上で否定的に論じた「贈与」をどのように再解釈し、赦しの可能性を残そうとしたのか。先行研究においても、リクールが赦し論に贈与概念を導入したことの意味や、それが彼の赦し論全体に与えている影響については、検討の余地が残されている。本論では、リクールの赦し論の中で、贈与が赦しの行為者の関係性を焦点化していることを明らかにする。彼にとって贈与とは「与えること」と「受け取ること」という交換である。リクールは、贈与において「相互性」に着目し、行為者の「間」に着目することで、この不等価な交換を支える「感謝」の存在を重要視する。感謝は、満ち溢れの論理に基づいたアガペーの領域に位置付けられる。分析を通して、赦しを与える者と乞う者が、アガペーの領域において互いにとって相互的かつ代替不可能な「与える者」と「受け取る者」として捉えられている点に、リクールの独自性があることを明らかにする。

キーワード：赦し、リクール、贈与、愛、相互性

Title

Paul Ricœur's Concept of Forgiveness as a Gift: Between the Giver and Receiver

Name

Ayaka Ota

Abstract

Since World War II, the concept of forgiveness has been one of the most controversial topics across diverse fields. While Jacques Derrida (1930–2004), one of its leading exponents, asserted the impossibility of forgiveness, Paul Ricœur (1913–2005) challenged this viewpoint by discussing the notion of “difficult forgiveness,” as a type of non-commercial exchange. In this regard, how did Ricœur reinterpret this “gift” (i.e., Derrida’s claim of impossible forgiveness) to preserve the possibility of forgiveness? In previous research, Ricœur’s concept of this gift and its impact on his theory of forgiveness remains open to investigation. Thus, this study clarifies this gift by focusing on the relationship between the actors in forgiveness. Specifically, for him, a gift is an exchange between the “giver” and “receiver.” By focusing on the “mutuality” in this gift between the actors, Ricœur emphasizes the existence of “gratitude” that supports this inequivalent exchange. Here, gratitude is positioned within the “regime of agape,” based on the logic of superabundance. Through this analysis, the study argues that Ricœur’s uniqueness is based on the fact that the giver and beggar of forgiveness can be considered as the giver and receiver, who are mutually irreplaceable within the “regime of agape.”

Keyword: Forgiveness, Ricœur, Gift, Agape, Mutuality

はじめに

赦しは、第二次世界大戦以降、多様な領域で論争的となってきた概念の一つである。その代表的な論者である¹ ジャック・デリダ Jacques Derrida (1930–2004) が赦しの不可能性を主張したのに対し、非商業的な交換としての「困難な赦し」を論じ、挑戦を投げかけたのがポール・リクール Paul Ricœur (1913–2005) であった。果たしてリクールは、デリダが論じた赦しの不可能性をどのように乗り越え、赦しの可能性を残そうとしたのか。

赦しは、リクールが晩年になってからはじめて本格的に取り組んだテーマであった。記憶と歴史をめぐる過去の表象の解釈を論じた『記憶、歴史、忘却 *La Mémoire, l'histoire, l'oubli*』(2000)において、そのエピローグを「困難な赦し」と題し、赦しを主題的に論じた。第一次世界大戦で父を失い、第二次世界大戦を若くして経験しながらも、晩年でようやく赦しを主題的に扱ったのである。多くの分野に自身の思索の裾野を広げつつも、父の死や第二次世界大戦の経験に深く紐づいた概念であるはずの赦しについて、最晩年まで論じようとしなかったことは、彼が赦しに対していかに用心深くあったかを示唆していると言えるだろう。

本論は、リクールが論じた贈与としての赦しについて検討する。先行研究は、倫理学や宗教学・神学、歴史学や政治学など、あらゆる学問領域における観点から、リクールの赦し論が彼の思想の中にどのように位置付けられるかを検討してきた²。その中には、贈与論を切り口として彼の赦し論を分析したものも少なくない。ただし、リクールの赦し論における贈与概念は、あくまでデリダ、モースらとの比較や、彼らからの影響を説明するためのものとして紹介される程度に留まっている³。杉村(2006)は、デリダとリクールが最晩年に行った赦しを巡る論争において、贈与が鍵概念となっていることを指摘した上で、再認(reconnaissance)という語を軸に双方の立場の違いを明らかにしている。この対比は、贈与の捉え方の違いがいかに二者の赦し論の結論の違いに結びついているかを示している点で意義が認められる。しかし、同論文においては、贈与はデリダとリクールの赦し論における立場の違いを説明するものとして位置付けられており、リクールの赦し論において贈与に与えられた独自の働きを解明するには至っていないと言える。そのため、リクール自身が赦し論に贈与概念を導入したことの意味や、それが彼の赦し論全体に与えている影響については、検討の余地が残されている。他方で、リクールの贈与論について詳細に論じた先行研究⁴においては、赦し論は補足的に付け加えられている程度に留まっており、贈与論における重要概念として赦しが十分に分析されているとは言えない。

本研究は、リクールの赦し論における贈与が、実際の赦しの場面における赦しの行為者を焦点化している点において、独自の役割を果たしていることを指摘する。この指摘は、贈与がリクールがデリダの赦し論を乗り越えるための単なる足掛かりではなく、彼自身の赦し論を形成する上で必要不可欠な概念であることを明らかにする。川口(2012)は、リクールの赦し論が全体にわたって「赦しの次元を政治や司法の次元から明確に区別しつつも、しかしつねに実際的な「諸々の制度」との関連において赦しを語ろうとするという一見矛盾ともみえる論の進め方」(傍点著者挿入)でなされていると指摘した(p. 447)。この川口の指摘を導きの糸として、本研究は、リクールが赦しを実際の行為者の間で生じるものとして捉えようとしたこと、そしてそこから赦しの可能性を論じようとしたことに着目する。リクールは赦しの可能性を探究する上で、赦しがなされるまさにその場面に主眼を置き、赦しの行為者の関係性に光を当てた。本論は、リクールがそこから赦しの可能性を論じようとしたことに彼の赦し論の独自性を見いだす。

本論ではまず、リクールによる赦し論の前提として、ジャンケレヴィッチからデリダに至る議論の流れを整理する。その上で、リクールがデリダの論じた不可能な赦しへの応答を通じ、その可能性を探究した過程を確認し、贈与としての赦しを肯定したことを明らかにする。赦しは愛によって贈与という非商業的かつ不等価な交換として可

能となること、そしてその交換が、赦しを与える者と乞う者を相応的かつ代替不可能な存在として互いに位置付けることで赦しの可能性を開くことを示す。

1 第二次世界大戦以降の赦し論

1-1 ジャンケレヴィッチの赦し論

第二次世界大戦終戦から時を経るにつれて、ナチス協力者に対する時効を認める声が上がりはじめ、ドイツを「いかにして赦すか」ということが問われるようになった。例えば1970年には、西ドイツ（現ドイツ）の当時の首相ヴィリー・ブラント Willy Brandt（1913–1992）が、ポーランド人民共和国（現ポーランド共和国）のユダヤ人慰霊碑前でひざまずいて謝罪した。また1995年には、当時の仏大統領ジャック・シラク Jacques Chirac（1932–2019）がユダヤ人迫害について公式に反省と謝罪をした。このような潮流は、いわば罪を償うことよりも、赦しを乞うことに焦点が当てられるようになったことを示しているだろう。

そうした世論の動きに対し強い批判を向けたのが、フランスの哲学者ウラジミール・ジャンケレヴィッチ Vladimir Jankélévitch（1903–1985）であった。彼は、終戦から時が経ち、フランス国内でナチス協力者に時効を認めようという論調が高まる中、時効にしえないもの *l'imprescriptible* の存在を強く主張し、その生涯を通じてドイツへの赦しに対し抗議し続けた。ジャンケレヴィッチ（1986）は『時効にしえないもの *L'Imprescriptible: Pardonner? Dans l'honneur et la dignité*』（1986）で、ナチスの犯した罪は赦しえないものであるとし、「赦しは死の収容所の中で死んだ」と述べた（p. 50）。彼は、ナチスの罪の赦しえなさを主張するにあたり、ナチスが赦しを乞っていないことを強調した。

赦し！だが彼等はわれわれにかつて赦しを乞うたことがあるだろうか？罪人の悲嘆と見放された状態こそが唯一、赦しに対し、その意味と存在理由を与えるだろう。（Jankélévitch, 1986, pp. 50–51; 79）

つまり彼は、加害者が被害者に対して赦しを乞うことではじめて赦しがなされうと考えるのであり、いわばこの懇願は、赦しを可能にする最初の条件なのである。

しかし、ジャンケレヴィッチ（1967）は『赦し *Le Pardon*』（1967）で「究極的に赦すことのできない過ちは存在しない」と述べる（p. 203）。つまり彼は、赦しは例外なく全ての過ちに対して常に可能であるとしながらも、加害者が赦しを乞わない場合には赦しがなされることはないとしたのである。

1-2 デリダの論じた赦しの不可能性

このジャンケレヴィッチの主張に対し、デリダは強い批判を向けた。デリダは、同時代の「ナチスの罪をいかにして赦すか」という論調に対し批判的であるという点ではジャンケレヴィッチと同じ立場にいた。しかしデリダは、ジャンケレヴィッチが加害者が赦しを乞うことを赦しの条件としていることを次のように指摘する。

赦しのひと言を、赦しの懇願を自分は待っていたと告げることによって、ジャンケレヴィッチが告白してい

るのは要するに、彼は赦しが乞われるのを待っていたということである—（中略）私としてはここではつぎの場面の特徴を強調しておきたかったのである。すなわちここでは、（中略）乞われた赦しが意味され=示される *signifie* ことが要求され、期待されているのである。（デリダ, 2015, p. 45）

デリダにとって、ジャンケレヴィッチのように赦しが乞われることを期待することは、むしろ赦しを遠ざけることであった。デリダにとって赦しとは無条件に与えられるものであり、赦しが乞われることへの期待はその無条件性に反するからである。デリダは、ジャンケレヴィッチの論じたような乞われることを期待する赦しを、打算的なものであるとして批判する。

しかし私は、この条件付きの交換の論理に、過ちが意識されていること、罪人が変わったこと、悪の再来を回避するためあらゆることをするという、少なくとも暗黙の誓約がなされたことが同時に認証されるような改悛の場面の中で赦しが求められたという条件においてしか赦しを考慮することはできないという、あの広く流布している命題に異を唱えたいのです。ここにあるのはあるエコノミー的な商取引 *transaction économique* であり、われわれが言及したアブラハムの伝統に、確証を与えると同時に反してもいます。（Derrida, 2000, p. 110）

デリダは、ジャンケレヴィッチの赦しには「赦しを請わない者は赦されえない」という前提が潜んでいるとし、これを「エコノミー的な商取引」と呼んだ。この表現は、ジャンケレヴィッチが損得勘定を基盤とした価値判断において赦しを捉えていることに対する批判である。ジャンケレヴィッチの赦しが乞われることへの期待は、暗に赦しが赦しの懇願と交換されるものであることを前提としている。つまり、赦しの「価格」に見合うような「代価」を支払うことを要求しているのである。デリダは、ジャンケレヴィッチの主張にはこのような商業的な交換の構造の前提があるとして、批判を向けるのである。

もし私が、私に赦しを乞うために他者が告白し、立ち直り初め、みずからの過ちを変容させ始め、他者自身が過ちからみずからを切り離し始めることを条件として赦しを授けるとしたら、そのとき、私の赦しは、赦しを腐敗させるある計算によって汚染されるがままになり始めてしまうのだ。（Derrida, 2015, p. 110）

デリダにとって、被害者、犠牲者が罪人に赦しを乞うことや、罪を告白することを条件とする「エコノミー的な商取引」のような損得勘定の価値判断に基づいた「計算」は、赦しという概念そのものを墮落させるのである。

では、デリダが真の赦しとして認めるのはどのようなものであるのだろうか。デリダは以下のように述べる。

一方で、無条件的で恩寵的で無限で非エコノミー的な赦しという観念。しかも、同時に要求でもある観念。それは、比類なく罪ある者としての罪ある者に向けられる赦しであり、改悛もせず、赦しを要求しない人にさえ向けられる。（Derrida, 2001, p. 110）

デリダにとって、赦しとは、加害者が請うか否か、悔悛するか否かに関わらず行われるものである。そこには、「エコノミー的な」価値判断はもはや存在せず、赦しは反省や改悛の対価として条件的に与えられるものではない。さらに、赦しは無条件であるだけでなく、無限である。つまり、赦しはどんなに非道な罪も、赦すのである。それど

ころかデリダは、赦しは最も非道な人道に反するような罪に対してこそ与えられるものであると言う。デリダが唱えるのは、赦しとは赦しえないものに対してなされるものであるという逆説的なテーゼである。そして、赦しえない罪に対してのみ発生しうる無条件的な赦しについて、以下のように述べる。

赦すべきなものがあるとするれば、それは、宗教的な言葉遣いで大罪 *péché mortel* と呼ばれるもの、最悪の罪、赦しえない罪あるいは害であるでしょう。(中略) 赦しはただ赦しえないもののみを赦す。赦すことができるのは、赦さなくてはならないであろうものは、赦しが—そのようなものがあるとして—あるのは、ただ赦しえないものがあるところだけである。要するに、赦しは、不可能なものそのものとしておのれを予告しなくてはならないということです。それは可能でないこと *l'im-possible* をなすことによってしか可能ではありえない。(Derrida, 2001, p. 108)

「赦しはただ赦しえないもののみを赦す」という逆説的表現は、まさに赦しの不可能性を端的に表している。赦しえない罪において、それを犯した者は一切悔い改めず、赦しを乞うことすらしない。彼は反省すらせず、再びその罪を犯すであろう。しかし、赦しとは、そうした罪に対してもたらされるものなのである。真の赦しは、赦しによって赦した者に何かしらの見返りがある場合や、赦された者が反省することが期待される場合には実現しない。デリダは、「条件付きの交換の論理」に陥らないためには、いかなる反省も謝罪もあってはならないと述べるのである。

2 リクルールの「贈与としての赦し」

2-1 赦しにおける相関関係に対する信念

ここからは、デリダのジャンケレヴィッチ批判によって導き出された「赦しは赦しえぬものを赦す」という赦しの不可能性をなすジレンマに、リクルールがどのように応答したのかを確認する。その上で、私たちが現実世界において実際に信じている「実践における信念」を起点とした、リクルールの赦し論の詳細について分析していく。

リクルールはデリダの赦し論をどのように受け止め、自らの主張を構築したのだろうか。『記憶、歴史、忘却』のエピローグ「困難な赦し *Le pardon difficile*」でリクルールは、デリダの棄却した交換的な赦しをむしろ肯定的に捉え、その可能性を見いだそうとする。そこで、本論では彼が赦しを贈与として捉え、その交換的な側面を肯定していることに着目し、リクルールが贈与の概念の再考を通じ、赦しを現実的な赦しの場面で行為者の間に生じるものとして問い直そうとしている過程を読解する。

リクルールはデリダを真っ向から批判しているわけではない。それどころか、デリダの主張はむしろ「正しい」とまで認めている。デリダ (1991) は「無条件の、非エコノミー的な、交換を超えた、贖罪や和解の地平さえ超えた赦し」を主張し (p. 26)、それが加害者の反省や謝罪といった条件なしに、そして極限まで損害を被ったときに、なされるものでなければならないと述べた。一方リクルール (2000) は、『記憶、歴史、忘却』のエピローグ「困難な赦し」で、「赦しは赦しえないものに向けられるのであり、さもなければ赦しではない。赦しは無条件であり、それに例外はなく、制限もない。それは赦しを乞うことを前提としない」と述べる (p. 605; 下 283)。そして、「ジャック・デリダの言ったことは正しい」としてデリダの論じた赦しの無条件性に同意する (Ricœur, 2000, p. 605; 下 283)。「われわれはデリダとともにこう言った。赦しがあるとすれば、それは赦しを乞うという条件なしに与えら

れねばならない、と」(Ricœur, 2000, p. 619; 下 285)。

しかしリクールは、「それでいながらわれわれは実際には、乞われる赦しと与えられる赦しとの間には、相関関係 *corrélation* のようなものがあると信じている」と述べ (Ricœur, 2000, p. 619; 下 285)、私たちが現実において抱いている「実践における信念 *croyance pratique*」の存在を指摘する (Ricœur, 2000, p. 619; 下 285)。ここでリクールは、デリダの論じた理念的な赦しと現実世界での現実的な赦しの捉えられ方のギャップに着目する。前者は乞われる赦しを前提としない一方で、後者は与えられる赦しを乞われる赦しとの相関関係において捉えたものである。

乞われる赦しと与えられる赦し間の相関関係に対する信念は、多くの人にとっての日常において馴染み深いように思われる。例えば、ある人物が別の人物に対し、損害をもたらしたとする。このとき加害者は、多くの場合、自らのなした加害に対して謝罪したり、弁償したりするなどして赦しを求めるだろう。その振る舞いには、加害者の「赦しを乞うことで被害者が多少なりとも赦してくれるだろう」という前提があるのではないだろうか。加害者の被害者に対する振る舞いは、実際にはまさにこうした乞われる赦しと与えられる赦し間の相関関係に対する信念の下になされるとリクールは考えるのである。

この「相関関係のようなもの」という表現は、注目に値する。相関関係 *corrélation* とは、二つの事象に関連性がある関係を意味し、一方が変化するともう一方も変化するような関係を指す。リクールは、こうした両者が相互的な影響を及ぼし合う関係から少し距離のある「相関関係のようなもの」が、乞われる赦しと与えられる赦しの間にあると指摘するのである。これは、一方の変化が原因となって他方が確実に変化するような因果関係でもなければ、一方の変化に伴い必ず他方も変化するような相関関係でもない。乞われる赦しと与えられる赦しの間にあるのは、相関関係「のようなもの」なのではある。赦しを乞うことで、必ず赦しを与えられるわけではない。しかし、確かに「赦しを乞うことと赦しを与えることにはなんらかの影響関係の内にある」と私たちは信じているのではないかとリクールは考えるのである。

デリダのように、理念としての赦しを練り上げようとするれば、現実的には赦しは不可能であると結論づけられるかもしれない。しかし、私たちの誰しもがこうした実践における信念を持っているという事実から出発し、そうした信念を持っている私たちが現実においてなす赦しをリクールは論じようとするのである。杉村(2006)は、この「実践における信念」は、デリダの論じた理論的なアポリアにも関わらず保持されうるものであり、その核心に、交換条件には還元されない「相関関係のようなもの」がある、という信念があると指摘している (p. 52)。

2-2 非商業的な交換関係と赦しの可能性

デリダの主張を思い起こせば、乞われる赦しと与えられる赦し間の相関関係に対する信念は、私たちの赦しの解釈を誤った方向に導きかねない。乞われる赦しと与えられる赦し間の相関関係を信じることは、赦しを「乞われたがために与える」といった、商業的な交換にしてしまうのではないだろうか。結論から言えば、リクール (2000) は、その信念を「容疑と処罰の一方的な体制の誤りを、交換 *échange* の体制に移し替える」ものとしてむしろ肯定しようとする (p. 619; 下 285)。

デリダの論じた無条件的な赦しは、赦しを乞わない者に対して与えられるようなものであり、彼は赦しが乞われないう場面を重視した。一方、リクールは赦しが乞われる場面から赦しの議論を始めようとする。彼によると、赦しを乞うことは、二つの体制に属している。

それ〔赦しを乞うこと〕は、思想の二つの体制に属していることを証明する。すなわち一つは、容疑 inculpation の体制で、それはまた赦しえないものの体制である。もう一つは、赦しの要求 demande と供与 offre の交換の体制で、そこでは赦しえないものが崩れ effriter 始める。今やこの新しい体制の方向に前進しなければならない。(〔〕内引用者挿入) (Ricœur, 2000, pp. 618–619; 下 285)

まず、一つ目の「容疑の体制」について見てみよう。これは、現代の刑事司法の制度を指し示している。加害者は、「容疑の体制」下では法律という規則に従って告発され、容疑者として扱われる。リクール (2000) は、この体制の下では赦しが罰と対置されていることを指摘する。「この社会的次元では、罰することができる場所でしか、赦すことはできない」(p. 608; 下 275)。罰が目的とするのは、「他者、すなわち犠牲者の犠牲において犯された害を、象徴的、現実的に否定することによって、法を回復することである」(p. 608; 下 276)。一方、その罰と対置される赦しが実行されることは、規則の違反に対する無処罰をつくりだす、大なる不正としてみなされる (Ricœur, 2000, p. 608; 下 276)。つまり赦しは、刑事司法制度の場合においては、すなわち「容疑のしるしのもとでは、赦しは正面から過ちに出会うことはできず、副次的に有罪者に出会うだけである。権利上赦しえないものは残る」(Ricœur, 2000, p. 608; 下 276)。

訴訟において容疑を掛けられた者は、ただ己の受ける処罰の最終的な判決を受け入れることしかできない。容疑を掛けられた者に対する処罰は、「受け入れられる」のではなく「下される」のであり、それが司法の制度である。ここには、加害者と被害者の間での双方向的な交換はない。そのため、リクールはこの体制を「容疑と処罰の一方的な体制」と呼ぶ。

リクール (2000) によると、「乞われる赦しと与えられる赦しとの間の相関関係に対する信念」は、この容疑と処罰の一方的な体制の誤りを、赦しを乞うことが属するもう一つの体制、すなわち交換の体制に移し替える (p. 619; 下 285)。リクールが赦しの可能性を見るのは、この「交換の体制」においてである。リクールは、この体制において、「容疑の体制」における「赦しえないもの」が「崩れる」と考える。

ここで特筆すべきは、「赦しは赦しえないものを赦す」と述べたデリダに対し、リクールは「赦しえないものを赦す」ための道を提示するのではなく、「赦しえないもの」自体を崩す、すなわち「赦しえないもの」の「赦しえなさ」を弱める道を追究しようとしていることである。そしてそれは、乞われた赦しによって生まれた「交換」の先にこそあるとリクールは主張するのである。赦しは、刑事司法の制度においては加害者に対し正当な刑罰を下さない不正義としてみなされうる。しかしリクールは、赦しを、乞い、与える交換として捉えることで「告発と処罰の循環の外へ一歩踏み出そう」とするのである (Ricœur, 2000, p. 619; 下 285)。

彼はデリダの批判した「乞われた赦しを前提とすること」をむしろ交換の端緒として肯定的に捉え直し、そこに活路を見いだそうとする。「告発の体制から、赦しを乞い、赦しを与える交換の体制への転換」(Ricœur, 2000, p. 616; 下 283) こそが、リクールがデリダから引き受けた「不可能なものの試練」の突破口となる。これが、赦しを現実的な次元から論じようとするリクールの主張なのである。リクール (2000) によれば、「乞われる赦しと与えられる赦しとの間には、相関関係のようなものがある」という実践における信念は、「制度に変換されえない振る舞い」、すなわち赦しを乞うことを引き起こすのであり、そのことが交換関係を構築する (p. 618; 下 284)。私たちの社会は、確かに「容疑と処罰の一方的な体制」の下にある。この社会において、私たちは容疑を掛けられれば裁きを下される。しかし、その体制を理解し、私たち自身がその体制の下にあるとわかっていながらも、私たちはどこかで、乞われる赦しと与えられる赦しとの間の相関関係を信じてしまう。この、否応なく信じてしまう信念が、私たちに赦しを乞わせるのである。

リクールは、クラウス・M・コダーレ Klaus-Michael Kodalle (1943-) の言葉を借り、赦しを乞うとは「顧慮 *considération* (*Nachsichtlichkeit*)」をひき起こして、制度に働きかけることであると述べる (Ricœur, 2000, p. 618; 下 284)。これが、罪を犯した者を処罰しようとする者に、罪を犯した者を理解しようとする「粘り強い意志 *une volonté tenace*」を芽生えさせ、一方的に処罰を下すような制度を揺すぶるような作用を持つ (Ricœur, 2000, p. 618; 下 284)。そしてこの赦しを乞うことこそが、被害者と加害者を「処罰を下す者」と「処罰を下される者」という一方的な関係から「赦しを与える者」と「赦しを受け取る者」という交換的な関係に移行させる、すなわち「交換の体制」に移行させるのである。

確かに乞われた赦しによって「顧慮」が出現することで、容疑への応答として処罰だけでなく赦しの可能性が開かれるかもしれない。しかし、乞われた赦しから始まった赦しは、まさしくデリダが「エコノミー的な商取引」として批判した赦しの形であった。乞われた赦しから生まれた赦しは、果たして赦しとして認めることはできるのだろうか。それは、「赦しえぬことを赦す」ことにはならないのではないだろうか。この問いに対し、リクールはデリダとは異なる仕方で赦しの不可能性に向き合うことで、独自の答えを導き出そうとする。

2-3 贈与とアガペー

デリダは、交換的な赦しを「条件付きの交換の論理」に基づく商業的なもの、すなわち「エコノミー的な商取引」として批判した。しかしリクールは、赦しを贈与という非商業的な交換の形式と結びつける。商業的な交換としての赦しの商業的な側面は斥けつつも、その交換としての側面は保持したまま、赦しの可能性を探究するのである。ここで特筆すべきは、リクールは「商業的な交換」としての赦しを肯定したわけではなく、あくまで利害関係を前提としない「非商業的な交換」としての赦しを主張したことである。リクールは、この「非商業的な交換」という概念を、「贈与」という言葉で説明する。彼は、赦しを贈与として捉えることで、それを現実において可能なものとして論じようとするのである。

デリダは、ジャンケレヴィッチが乞われた赦しを前提として赦しの可能性を論じていることを指摘し、そうした前提の上に立った赦しは「エコノミー的な商取引」であるとして批判した。デリダはそれだけでなく、赦しという言葉そのものに商業的な贈与という意味が含まれていると主張する。ドイツ語で「赦すこと」を意味する *vergeben* という言葉そのものに「配り損ない *mal donne*、贈与の腐敗 = 贈収賄 *corruption du don*」という意味があるとし、さらに同じ語源を持ち「賞の授与」などを意味する *Vergabe* は、「独占された市場、競売 = 落札である」と指摘する (Derrida, 2015, p. 12)。すなわち、「赦すこと」という言葉の語源自体に悪しき商業的な贈与という意味が含まれていると述べるのである。

リクールもデリダと同様に、赦しと贈与の連関を捉えようとした。しかし、彼は赦しを悪しき商業的な贈与として捉えようとはしなかった。彼にとって、赦しと連関を持つ贈与とは「見返りなしに敵を愛せ」というキリスト教におけるイエスの命令なのである。

このとんでもない命令だけが、赦しの高みにいるように思われる。敵は赦しを乞わなかった。しかし敵をそのまま愛さなければならない。(Ricœur, 2000, p. 624; 下 289)

しかし、敵を愛すること、すなわち敵に愛を贈ることは、往々にして以下のような批判を浴びる。

贈ることは、贈与者を恩着せがましい優越性の位置におくことで、密かに不平等をつくりだす。贈ることは受贈者を、恩を受けた者に変え、感謝するよう強いて、縛ることになる。贈ることは受贈者を返済不能の重みで押しつぶす。(Ricœur, 2000, p. 625; 下 289)

この批判は、商業的交換に向けられるそれと同じトーンを帯びている。すなわち、表面上は、寛大さによって行われているように見えていても、実際は、贈与によって受贈者よりも優位な立場に立つための利害関係の中で行われているという批判だ。「無償の愛」を受け取った者は、それが無償であるがために返済できない。返済できない、すなわち返礼の義務が生じないことは、むしろ受贈者に返礼の義務以上の重荷を感じさせるのではないか。リクールは、こうした反対論が「寛大さの背後に利害が隠れていると前提している」ことを指摘する (Ricœur, 2000, p. 625; 下 290)。そして、敵への愛は返礼を期待する故に生じるものではなく、敵を味方に変えるものであると主張する。

誇張法という福音書のレトリックに忠実にしたがって命令は、敵になされた贈与、そして仮説上そこから返礼を期待しない贈与のみが、正当化されるのを望むであろう。だがその仮説こそ間違っている。愛から期待すること、それは敵を味方 *ami* に変えることである。(Ricœur, 2000, p. 625; 下 290)

敵を愛すること、敵に贈与することは、「敵から」返礼を期待するべきではない、ということの意味しない。ここには、返礼への期待はない。敵になされた贈与は、敵を愛することによって、敵を味方に変容させるのである。つまり、リクールが「赦しの高み」に位置するとした「見返りなしに敵を愛せ」という命令は、「敵を愛する際には見返りを期待するな」と命令しているわけではない。敵を愛する際に期待されるのは、敵がその愛をただ受け取ること、またその結果、受け取った者が味方になるという出来事である。このような愛の贈与では、それを受け取る者に「お返ししなければ」「感謝しなければ」と強いることがないのである。ここにはもはや、利害関係の中で生じる交換にある尺度は存在しない。福音書は贈与に「常軌を逸した」尺度を与えることによって、商業的秩序を内部から粉砕するのである (Ricœur, 2000, p. 625; 下 290)。

そして、リクール (2000) はこの敵を愛するという贈与を「贈る—返礼するの交換ではなく、贈る—受け取るだけの交換である」とし、これこそが「贈与の非商業的な形」とであると主張する (p. 626; 下 290)。この主張が何を意味するのか、『承認の行程 *Parcours de la reconnaissance*』(2005) の中で詳しく見てみよう。彼は、「アガペーの領域では贈与の発露のうちにあるお返し—贈与が知られていない」と説明する (Ricœur, 2005, p. 344; 318)。つまりリクールが「贈与の非商業的な形」として「敵を愛せ」という命令が贈る—受け取るだけの交換であるのは、それがアガペーの元になされるからなのである。

この新約聖書において基本的な愛として登場するアガペー *ἀγάπη* を、リクールは単なるキリスト教的な愛に限定されたものとしては捉えない。「アガペーは、贈与が交換という社会的形式をまとっているような見慣れた世界の真ん中で生じる」と述べている (Ricœur, 2005, p. 348; 322)。そして、アガペーは「それが比較と計算を知らないという理由で、さまざまな等価性に対する準拠を無用のものにする」(Ricœur, 2005, p. 344; 318) と述べる。つまり、本来等価なもの間で行われるはずの交換から、等価性という尺度を取り去り、不等価なもの同士すら交換することを可能にするのである。そして愛を向けられた者は、責務を知らないリクールは主張する。贈り物を受け取った相手は、責務の存在を知らないため、その圧力に苛まれることはない (なぜここで責務が生じないかについては後述する)。よって、受贈者は返礼の義務に縛られないため、返礼する者ではなく受け取る者として捉えられるのである。リクールは、贈与を客観的な構造によって捉えるのではなく、贈与の行為者の視点、すなわち彼らが何を思い、贈与を行っ

ているのかという心的なもの、愛の次元の観点を重視する。

このようなリクールの観点は、どこからくるのか。リクール（2005）は、クロード・ルフォール Claude Lefort（1924–2010）がクロード・レヴィ＝ストロース Claude Lévi-Strauss（1908–2009）への批判として、「社会を規則によって計算可能な宇宙へと還元しようという野望」が「さまざまな行動に内在する意図」を消し去ってしまうと述べたことを例に出し、理念的な議論が現実における現象の内実へと目を向けることを妨げる危険性を指摘する（p. 352; 325）。そしてこれが「贈与の意義そのもの」すら見えなくしてしまうと言う（Ricœur, 2000, p. 352; 325）。贈与といった現象を客観的に分析しようとするがためにつくられる「外部の観察者によるさまざまな構築物」が、現象の当事者である行為者たちが「実際には」何を考えてその行動をしているのかということの覆い隠してしまうのである（Ricœur, 2005, p. 352; 326）。彼はそれを危惧し、実際の行為者の「贈与の生き生きした経験」に目を向けようとするのであった（Ricœur, 2005, p. 375; 345）。

さて、ここまで、リクールが贈与を「贈る－受け取るだけの交換」として論じた背景には、贈与の際に受贈者に対し愛が向けられることへの指摘があることを確認した。愛は、交換を等価性という尺度から解放するのであり、またリクールにとって贈与とは、贈与を受け取る相手を拘束するものではなく、むしろその者に愛を向けるようなものである。しかしこうした「贈る－受け取るだけの交換」は、一見すると、先ほど見た商業的な交換と酷似しているように見える。リクールは、どのようにして贈与を商業的交換と区別するのだろうか。

2-4 相互性と相応性

リクール（2005）は、アガペーについてセーレン・オービュ・キルケゴール Søren Aabye Kierkegaard（1813–1855）の言葉を引用し、アガペーの領域においては「さまざまな存在の「共約不可能な」性格が「一方と他方の無限の相互性」を取り戻させる」と述べる（p. 345; 319）。つまり贈与は、愛の存在する場における相互性によって、共通の物指しで測れない、比較しえないもの同士の交換が可能となるのである。アガペーの領域においてなされる贈与は、無限の「相互性 *mutualité*」による交換なのである。この相互性がどのようなものであるかについては、商業的交換において愛が存在しないことの説明を通して明らかになる。

まず、リクールが述べた商業的交換に関する以下の記述を見てみよう。

市場においては、お返しの責務はないが、これは要請がないからである。支払いが、交換の行為者たちの相互的な責務にけりをつける。（Ricœur, 2005, p. 359; 331）

商業的な交換では、需要者は供給者に対して返礼が発生しない。それは、供給者が需要者に対してその商品と同等の価値を持つ金銭によって二者間の損益を清算することだけを求めているからである。「相互的な責務にけりをつける」とは、いわば双方の収支が商品と金銭の交換、すなわち精算による関係の清算が行われ、返礼の要請が生じずに交換だけを実行するということだ。

このような商業的な交換が行われる市場を、リクール（2005）は「相応性 *mutualité* なき相互性 *réciprocité*」と表現し、相応性と相互性という二つの概念を対置することで、非商業的な交換について論じる（p. 359; 331）。相応性とは「社会的行為者たち及び彼らの折合いの上方にある理論」であり、相互性とは「交換の行為者たちの間のさまざまな関係」を指すものである（Ricœur, 2005, p. 360; 332）。この二つの区別には、これまで見てきた理念と現実の距離に細心の注意を払う彼の姿勢が見て取れるだろう。相応性は論理という理念的な次元にあり、相互性は行為者の視点に立った

現実的な次元にある概念である。リクールは前述のように、商業的交換ではなく、贈与にはあるこの相互性が愛によって生まれていることを指摘することで、贈与を論じる上でその行為者に視線を向ける。

そして、贈与を特徴づける相互性を説明する「交換の行為者たちの間のさまざまな関係」において用いられる「間で *entre*」という言葉にリクールは行為者の視点に立った現実的な意味合いを託し、再び商業的交換を観察する際の理想的な視点と対比することで、彼の贈与に対する視点がここでも現実的な次元にあることを強調する。

問題になってくるのは、「間で *entre*」の意味である。この議論によって我々は、交換の中心人物たちの「間の」諸関係の平面における相互性を、独自性を備えた行為者たちがその仲介役でしかないような財や価値の循環という超越的な形態として理解されている、そのような相応性から区別するように導かれたのである。(Ricœur, 2005, p. 400; 372)

相互性は行為者の「間」に注目することで、行為者たちを独自の存在として捉えるものである。つまり、相応性は行為者をその交換において互いを代替可能な存在とみなす一方で、相互性は行為者を代替不可能な存在とするのである。これにより贈与は、単なる物と物の移動ではなく、人と人の間に生じる営みとして理解されるのである。

2-5 不等価な交換を実現する「感謝」

では、等価性に準拠しない交換、すなわち不等価な交換はどのようにして可能となるのだろうか。不等価な交換とは、一方が他方に対し A を差し出したとすると、A を受け取った他方は一方に対し、A よりも価値の低いもしくは高いものを差し出すような交換である。このような交換は、どちらか一方が必ず損をする。対してリクール (2005) は、「行為者たちが贈与を贈与として承認するときは何をしているかについて、専念して考えなければならない」と述べ、「行為者たちの間の憤み深い働き」に着目する (p. 357; 329)。つまり、繰り返しになるが、贈与がそもそもそうした損得勘定の入り込まないような次元、すなわちアガペーの領域に位置することに注目するのである。

そして、こうした不等価な交換を可能とするようなアガペーの領域に位置する「感謝 *gratitude*」が、贈与において等価性を排除するのだと述べる。

感謝は、与えること—受け取ることという対を一方に、受け取ること—お返しすることという対を他方に置く。感謝が二つの対の間にうがっ隔たりとは、不正確さ *inexactitude* という隔たりである。(Ricœur, 2005, p. 375; 345)

リクール (2005) は、「与える—受け取る—お返しをする」という贈与の一連の流れにおいて、受け取ることが軸として捉えられることで、「贈与が受け入れられる仕方が、贈られた者がお返しする責務があると感じる仕方を規定する」ことを指摘する (p. 374; 344)。そのため、贈与においては受け取ることがすでにお返しすることを含み込んでしまっているのである。そこでリクールは、「与えること—受け取ること」と「受け取ること—お返しすること」を感謝という言葉によって分離させる。この感謝による分離が、正確に等価なものを交換しようとするをやめさせるというのである。これは、贈与を「与えること—お返しすること」、つまり双方が与え、受け取るという同等な立場に立つような交換として捉えるような見方を解消し、贈与の力点を「与えること—受け取ること」という不正確、すなわち不等価な交換としての見方に移行させる。

「贈与の交換についての、お返しには無関心なアガペーの徴し」が返礼の義務から贈与の行為者を解放することで、「与えること—お返しすること」という不等価な交換が実現する (Ricœur, 2005, p. 375; 345)。この不等価な交換を支えるのは、「値段 prix と時間的猶予 délai temporel」に対する不正確さである (Ricœur, 2005, p. 375; 345)。前者の「値段」は、商業的な意味での価値であり、その不正確さが、交換されるものの価値が不釣り合いな状態を指すことは想像に難くないだろう。では一方、後者の「時間的猶予」の不正確さとは何を指すのだろうか。リクールは、これを「お返しにふさわしい convenable 時間」と言い換える (Ricœur, 2005, p. 375; 345)。これは、贈り物を受け取ってからお返しを贈るまでの時間を指す。贈与は、「与えること—受け取ること」の交換であり、ここに返礼することが責務として生じないのは、贈与が「時間的猶予」において不正確であること、すなわちお返しの期限が定められていないことに起因している。お返しが未来の「いつか」なされるようなものとして捉えられているからこそ、贈与は不等価な交換として可能になるのである。

ここまで、贈与がアガペーの領域において不等価な交換としてなされることを確認してきた。リクールは、赦しがこの贈与に属すると述べ、その不等価な交換が「恵みの満ち溢れの論理」に基づいたものであると指摘する。

赦しが贈与の経済 *économie du don* に属するのは、赦しを明確に示す恵みの満ち溢れの論理 *logique de la surabondance* によってであり、その論理にはまさに正義を支配する等価の論理 *logique de l'équivalence* を対立させるべきである。(Ricœur, 1995, p. 206; 198)

贈与と比される商業的交換において交換されるものは、黄金律に見られる「あなたが人にしてもらいたいことを、人にもしなさい」のような等価の論理に基づいて正確に測られる。一方、感謝によって実現する不等価な交換は、〈満ち溢れの論理〉に基づいてなされるという。Surabondance は、「過多、余分、過剰」を意味する。つまり、贈与における交換の不等価性は、価値の不足ではなく、価値の過多によって生じているのである。だからこそ、贈与はアガペーの領域に留まり続け、感謝によって支えられ、実現するのである。そして贈与は、この商業経済を基盤とした私たちの社会の中でもなお実現するほどの力を持つ。

贈与はやはり、我々の社会の中に存在している。たとえ我々の社会が、すべてに値段のついた、しかしその値段は贈与とお返し—贈与との間の関係を支配している社会的コードにしたがっている、そのような商業経済に支配されているにしてもである。(Ricœur, 2005, p. 348; 322-323)

こうした贈与の特徴は、先ほど見た実践における信念によって乞われる赦しが引き起こされる構図と相似形をなしていると言えるだろう。「乞われる赦しと与えられる赦しの相関関係」への信念は、贈与と同様、私たちの社会に敷かれた司法などを取り巻く制度や体制を前にしてもなお存在する。この信念は、それほど強力なものなのであり、だからこそ赦しの可能性は開かれているのである。

ここまでの議論を踏まえ、赦し論に立ち戻りたい。リクールは、乞われる赦しの属する「交換の体制」が赦しの可能性を開くと主張したのであった。そこには、交換の中でも赦しを贈与として捉えていたことが前提にある。リクール (2000) は、「贈与の概念と結びついた交換のモデルを赦しの問題形に拡張する」(p. 621; 下 287)。そして、「赦しは贈与の経済に属する」(傍点著者挿入) と述べる (Ricœur, 1995, p. 206; 198)。贈与は、リクールにとってアガペーの領域において与える者と受け取る者の間でなされる不等価な非商業的交換であった。赦しを贈与として捉えると、赦しの当事者は、「赦しを与える者」と「赦しを受け取る者」として捉えられ、この二者は、贈与という不正確

な交換において対峙する。赦しは、彼らが互いの利害に基づいて赦しを乞うたり与えたりするのではなく、満ち溢れの論理において、商業的な価値基準から逃れることによって可能なものになるのである。

おわりに

本論の目的は、「贈与としての赦し」の肯定を通じ、リクールがいかにして赦しの可能性を探究したのかを解明することであった。そのために、デリダの論じた赦しの不可能性がどのように乗り越えられたのかを明らかにした。リクールは、私たちが現に抱いている「赦しにおける相関関係に対する信念」から出発し、赦しを「非商業的な交換」、すなわち贈与として捉えようとした。それを通じ、赦しをアガペーの領域で捉えることで、赦しの当事者の視点に立ち、二者が互いに相応的かつ代替不可能な存在になることを強調したのであった。

本論は、リクールの赦し論の現実的な次元に着目し、赦しの可能性について検討してきた。先行研究において、贈与はリクールの赦し論における他の哲学者からの影響を説明するものとして、もしくはデリダへの批判の一足掛かりとしては位置付けられてきた。こうした贈与の位置付けは、あくまでリクールの赦し論の周縁を補足的に説明するものであり、彼の赦し論に独自に見られる現実的な行為の次元への眼差しとのつながりは十分に論じられてこなかった。本論は、贈与が「実践における信念」を出発点とし、赦しの行為者の視点に立ち、二者の関係性に光を当てるものであることを示した。これは、リクールの赦し論における贈与を巡る論述における「交換」という営みに焦点を当てることで、宗教的な文脈に属しつつも、人と人の中でなされるもの、すなわち現実的な行為者の間に生じるものとして赦しを捉え直す試みである。リクールの論じた赦しの可能性が、赦しが行われる場面によって分析によって開かれることを示すことができた点に本研究の意義が認められるだろう。

本論において残された課題は大きく三点あげられる。一点目は、「再認 reconnaissance」概念の検討である。リクールの赦しの可能性の主張は、デリダに対する反論であった。本稿では扱うことができなかったが、二者の赦し論における贈与を巡る論争は、「再認」を巡る議論に接続される（杉村，2006, p. 57ff）。デリダが贈与は贈与として再認されることで贈与は等価交換になり破棄されてしまうという立場を取る一方、リクールは、贈与における再認は感謝を意味するため、贈与が等価交換に属することはないと考える。両者の再認に対する認識の違いは、2002年にパリのユネスコセンターで開催された、「他者性」をテーマとするコロキウムにおいて講演したリクールにデリダが論評した場面においても顕在化したという。この再認について検討し、「不可能な赦し」と「困難な赦し」を弁証法的に分析することで、赦し論の更なる発展が期待できるだろう。

二点目は、「言述行為としての赦し」の検討である。本論は、リクールの赦し論において、贈与を通じて彼が行為者に焦点を当てていることを指摘した。リクールは「赦しを乞う—与える関係の相互的次元を認めることは、この関係を完全につくりなおすための第一段階にすぎない」と述べ、これまでの試みはあくまで赦しの始まりでしかないと主張する（Ricœur, 2000, p. 626; 下 290）。贈与から出発して彼の赦し論を紐解く上で注目すべきは、彼が赦しを「言葉の交換 échange de parole」と表現し（Ricœur, 2000, p. 620; 下 288）、その困難が「二つの言述行為 actes de discours の対決」にあると述べていることであろう（Ricœur, 2005, p. 619; 下 285–286）。つまり、赦しによって交換される不等価なものとは、不等価な「言葉」であり、さらに言えばその言葉を発するという行為、すなわち不等価な「言述行為」であると考えられる。本論は贈与概念のみに焦点を当てて論じたため、実際に交換される「私はあなたを赦す」という赦しの言述行為について扱うことができなかった。贈与としての赦しを肯定することで、いかにして赦しの言述行為の交換が可能になるのか、赦しにおいて交換される言述行為とはどのようなものであり、リクールがなぜ赦しを言述行為として捉えたのかについては、次稿に譲りたい。

三点目は、能力の次元における赦しの検討である。前述のようにリクールは、贈与を出発点として、言述行為、すなわち行為の次元で赦しを捉えていると考えられる。一方で、赦しは「行為者をその行為から解放する」ものであると述べ、それにより赦しを可能なものとして捉えようとしている (Ricœur, 2000, p. 637)。これは、赦しが罪を犯した行為者をその罪から解放するということを意味する。エピローグ「困難な赦し」では、「汝は汝の行為に優る (tu vaux mieux que tes actes)」と述べ、行為者をその行為を行う以上の能力を持つ存在として考える彼の立場を表している (Ricœur, 2000, p. 642; 下 303)。「赦しの星のもとでは、有罪者はその罪やその過ちよりほかのものも可能である *capable*、とみなされよう。有罪者はその行動能力を取り戻され、行動は継続する能力を取り戻されよう」 (Ricœur, 2000, p. 642)。これは、リクールが晩年において「自身の哲学的人間学を全体として特徴づけるために積極的に用いていった」「為しうる人間 *homme capable*」という人間観からくるものである (吉澤, 2016, p. 154)。行為としての赦しと「行為者を行為から解放する」ものとしての赦しがどのように接続されるかについても、今後の重要な課題としたい。

近年、赦し *pardon* は当事者同士の対話を重視した新たな司法のあり方、修復的司法を巡る議論の中で取り上げられるなど、現代においても重要な概念として位置付けられている⁵。昨今の不安定な国際情勢を鑑みれば、「不可能な赦し」ではなく「困難な赦し」を論じることの持つ今日的な意味には、慎重にならざるを得ない。「赦し」は、政治的な文脈に回収されうる非常に危うい概念である。歴史をどのように解釈し、語るのかということにもつながる問題である。「忘却」と「赦し」は全くもって異なるものだが、赦しについて語ることは、不都合な過去を忘却させるための言い訳として赦しが利用される危険性と隣り合わせでもある。そうした大きな枠組みでの議論を考慮しつつも、再度、実際の赦しの場面から出発し、人と人の間に生じる営みとして赦しを捉え直すことで、赦しを別角度から問うことができるのではないだろうか。

¹ 川口 (2005) は、デリダが赦しについて論じたインタビュー形式の小論『世紀と赦し *Le siècle et le pardon*』(1999) を、「分量的に大きいものでもなかったが、現代世界のアクチュアルな懸案事に対する考え抜かれた示唆と議論の引き締まった密度からか、ここ数年のデリダの仕事の中でも一際広く話題を呼んだ」ものとして評価している (p. 74)。

² *sabelle* (2013); Duffy (2009); Tongeren (2014); Abel (2021) など。

³ Gschwandtner (2023); Grassi (2022); Byun (2018); 山野 (2024) など。

⁴ 佐藤 (2003) ;Theobald (1995); Orth (1999), Hall (2002); MacCammon (2002) など。

⁵ Chapman (2016); Armstrong (2010); 小松原 (2012) など。

謝辞

本論文執筆に際し、査読者の方々には、大変手厚く、意義深いご意見を多く賜りました。共に本論文を作り上げて下さったことに、心より感謝申し上げます。

参考文献一覧

※日本語訳がある場合は既存の訳を引用し、必要に応じて一部改変を加えた。尚、既訳のページ数と巻数は、原典のページ数の後に併記している。

- Abel, Oliver. (2022). Forgiveness at the Border of Law. In M.Leeuw, G. Taylor, & E. Brennan (Eds.), *Reading Ricœur Through Law*, Lexington Books, 245–262.
- Armstrong, Jac. (2010). Restorative Justice as a Pathway for Forgiveness: How Could Forgiveness Operate within the Criminal Justice System?. In M. Maamri, N. Verbin, & E. Worthington (Eds.), *A Journey through Forgiveness*, Brill, 179–190.
- Byun, Kwang-bai. (2018). Paradox, Impossibility or Superabundance: Theories of Gift of Mauss, Derrida and Ricœur. *Cross-Cultural Studies*, 52, 1–29.
- Chapman, Tim, & Chapman, Alice. (2016). Forgiveness in Restorative Justice: Experienced but not Heard?. *Oxford Journal of Law and Religion*, 5(1), 135–152.
- Derrida, Jacques. (1991). *Donner le temps 1; La fausse monnaie*, Galilé.
- (2001(orig. 2000)). *Le siècle et pardon, Foi et savoir: Suivi de le siècle et le pardon*, Seuil.
- (2000) 「世紀と赦し」 鶴飼哲訳、『現代思想』第 28 号、89–109 頁。
- (2012). *Pardoner: L'impardonnable et l'imprescriptible*, Editions Galilée.
- (2015) 『赦すこと：赦し得ぬ者と時効にかかり得ぬもの』 守中高明訳、未来社。
- Duffy, Maria. (2009). *Paul Ricœur's Pedagogy of Pardon: A Narrative Theory of Memory and Forgetting*, Continuum Intl Pub Group.
- Fiasse, Gaëlle. (2018). Forgiveness in Ricœur. *Phenomenology and forgiveness*, In M. Caze (Eds.), Rowman & Littlefield International Ltd, 85–101.
- Geoffrey, Dierckxsens. (2017). Responsibility and the physical body: Paul Ricœur on analytical philosophy of language, cognitive science, and the task of phenomenological hermeneutics. *Philosophy today*, 61(3), 1–23.
- Grassi, Martín. (2022). A Future for Us: The Gift of Forgiveness. *NUEVO PENSAMIENTO*, 7(19), 66–80.
- Gschwandtner, Christina M. (2023). The Gift of Forgiveness: Perspectives from the French Philosophical Tradition. *The Routledge Handbook of the Philosophy and Psychology of Forgiveness*, Edited by Glen Pettigrove and Robert Enright, Routledge, 194–218.
- Hall, David. (2002). The Site of Christian Ethics: Love and Justice in the Work of Paul Ricœur. *Paul Ricœur and Contemporary Moral Thought*, Routledge, 143–163.
- Isabelle, Bochet. (2013). *Paul Ricœur, mal et pardon: actes de la journée d'étude organisée le 19 janvier 2013 par le Centre Sèvres-Facultés jésuites de Paris et le Fonds Ricœur*, Éditions.
- 岩田文昭 (1995) 「リクールにおける反省哲学と解釈学」『哲学研究』第 561 号、58–92 頁。
- Jankélévitch, Vladimir. (1986(orig.1965–71)). *L'Imprescriptible: Pardoner? Dans l'honneur et la dignité*, Seuil.
- (1967). *Le Pardon*, Aubier Montaigne.
- (2000) 「われわれは許しを乞う言葉を聞いたか？」 吉田はるみ訳『現代思想』第 28 号、78–88 頁。
- 川口茂雄 (2005) 「赦し、ほとんど狂気のように：デリダの宗教哲学への一寄与」『宗教学研究紀要』第 2 巻、73–95 頁。
- (2020) 「リクール」『現代フランス哲学入門』、川口茂雄・越門勝彦・三宅岳史編著、ミネルヴァ書房。
- (2012) 『表象とアルシーヴの解釈学』、京都大学学術出版会。
- 川崎惣一 (2008) 「リクールにおける自己の解釈学」『城西国際大学紀要』第 16 巻第 2 号、57–71 頁。
- 小松原織香 (2012) 「赦しについての哲学的研究：修復的司法の視点から」『現代生命哲学研究』第 1 巻、25–45 頁。
- 久米博 (2012) 『テキスト世界の解釈学：ポール・リクールを読む』、新曜社。
- Ricœur, Paul. (1998(orig. 1986)). *Du texte à l'action. Essai d'herméneutique I*, Éditions du Seuil. [引用略号：TA]
- (1992). *Lectures 2*, Seuil.
- (1995). *Le Juste*, Seuil.
- (2007) 『正義をこえて：公正の探求 1』 久米博訳、法政大学出版局。
- (2000). *La Mémoire, l'histoire, l'oubli*, Seuil. [引用略号：MHO]

- (上巻 2004、下巻 2005)『記憶・歴史・忘却』久米博訳、新曜社。
- (2005). *Parcours de la reconnaissance*, Folio Essais. (引用略号：PR)
- (2006)『承認の行程』川崎惣一訳、法政大学出版局。
- 佐藤啓介 (2003) 「リクールの贈与論：倫理の源泉としての贈与の経綸」『基督教学研究』第 23 号、75–88 頁。
- 杉村靖彦 (2006) 「悪・赦し・贈与：リクールとデリダの最後の論争」『宗教学会報』第 15 号、33–65 頁。
- Tongeren, Paul J.M. van. (2014). Salvation and creation: on the role of forgiveness in the completion of Paul Ricœur's philosophy. *International Journal of Philosophy and Theology*, 75(2), 169–182.
- Theobald, Christoph. (1995). La règle d'or chez Paul Ricœur: une interrogation théologique. *Recherches de Science Religieuse*, 83(1), 43–59.
- MacCammon, Linda. (2000). Jacques Derrida, Paul Ricœur, and the Marginalization of Christianity: Can the God of Presence Be Saved?. *Paul Ricœur and Contemporary Moral Thought*, Routledge, 187–211.
- Minani, Barthélemy Kabwana. (2016). *Pardoner à tout prix?: Du mal au pardon selon Paul Ricœur*, L'Harmattan.
- Orth, Stefan. (1999). *Das verwundete Cogito und die Offenbarung: Von Paul Ricœur und Jean Nabert zu einem Modell fundamentaler Theologie*, Herder, 404ff.
- 山野弘樹 (2024) 「赦し得ないもの」をめぐる赦しの在り処：リクール『記憶・歴史・忘却』における「留保としての忘却」概念の検討」『哲学』第 75 号、358–371 頁。
- 吉澤文尋 (2016) 「ポール・リクールの良心論：『他者としての自己自身』を中心に」『哲学・科学史論叢』第 18 号、137–157 頁。

Title

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理

Name

永原 健太郎、江原 慶

抄録

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、マルクス経済学の生産論および生産価格論の根幹をなすものである。しかし、いずれも標準的な数学の内容とは言い難く、特に Hawkins-Simon 条件は経済数学の教科書以外で解説されることは稀である。

他方で、マルクス経済学の教科書や研究書では、いずれも証明済みの命題として扱われることが多い。そのために、証明のプロセスを知るには、経済数学の教科書を参照することになる。

しかし、経済数学の教科書の内容は、多くの経済学徒にとってかなり難解で、分量も多い。しかも、Hawkins-Simon の条件の性質と Perron-Frobenius の定理の証明だけをフォローしたくても、結局通読を必要とするケースが多い。

そのため、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、そのマルクス経済学にとっての重要度は高いにもかかわらず、学習しにくい内容になっている。そこで本稿では、大学教養レベルの、ごく初歩的な線形代数の知識のみを前提として、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理を解説・証明する。

マルクス経済学の生産論・生産価格論において、最も基本的なレベルに属する部分だけに内容を絞ることで、分量を抑えてある。証明プロセスのベースは、経済学分野でもよく参照される二階堂副包『経済のための線型数学』（培風館、1961年）であるが、説明が省略されている箇所を補い、また用語も今のものにアップデートしている。

第1節（永原担当）では、数学的議論が展開される。ここが上で述べた本稿の主要な貢献部分である。

第2節（江原担当）では、すでに広く知られていることであるが、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的意味を述べ、第1節の貢献をマルクス経済学の研究の観点から補強する。さらに、2部門の一般的なケースで、Hawkins-Simon の条件の経済学的性質の解説、「マルクスの基本定理」および Perron-Frobenius の定理の証明を与える。これによって、高校数学「数学I」までの範囲で、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的エッセンスはフォローできる。

キーワード：マルクスの基本定理、生産価格、連立一次方程式の非負値解、固有値問題、単純固有値

Title

Hawkins-Simon Condition and Perron-Frobenius Theorem

Name

Kentaro Nagahara, Kei Ehara

Abstract

The Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem constitute the essence of the theory of production in Marxian economics. Actually, the two are not found in standard textbooks of mathematics. However, in textbooks and papers of Marxian economics, they are often treated as propositions already proven. In order to understand the proof, it is necessary to refer to textbooks on economic mathematics, which are quite challenging for many students of economics. Moreover, even if one intends to follow only the properties of the Hawkins-Simon condition and the proof of the Perron-Frobenius theorem, many textbooks require thorough reading.

As a result, despite their high importance in Marxian economics, the Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem are difficult to learn. This paper explains and proves the two, assuming only very basic knowledge of linear algebra at the university level. In Section 1 (authored by Nagahara), mathematical discussions are developed, which constitute the main contributing part of this paper as mentioned above.

Section 2 (authored by Ehara) describes the economic significance of the Hawkins-Simon condition and the Perron-Frobenius theorem, thereby reinforcing the contributions of Section 1 from the perspective of Marxian economics. Furthermore, it provides explanations of the economic properties of the Hawkins-Simon conditions and the proofs of “Fundamental Marxian Theorem” and the Perron-Frobenius theorem in the general case of the two sector model.

Keyword: Fundamental Marxian Theorem, Price of Production, Non-negative solution of simultaneous linear equation, Eigenvalue problem, Simple eigenvalue

はじめに

Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、マルクス経済学の生産論および生産価格論の根幹をなすものである。しかし、いずれも標準的な数学の内容とは言い難く、特に Hawkins-Simon 条件は経済数学の教科書以外で解説されることは稀である。

他方で、マルクス経済学の教科書や研究書では、いずれも証明済みの命題として扱われることが多い。そのために、証明のプロセスを知るには、経済数学の教科書を参照することになる。

しかし、経済数学の教科書の内容は、多くの経済学徒にとってかなり難解で、分量も多い。しかも、Hawkins-Simon の条件の性質と Perron-Frobenius の定理の証明だけをフォローしたくても、結局通読を必要とするケースが多い。

そのため、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理は、そのマルクス経済学にとっての重要度は高いにもかかわらず、学習しにくい内容になっている。そこで本稿では、大学教養レベルの、ごく初歩的な線形代数の知識のみを前提として、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理を解説・証明する。

マルクス経済学の生産論・生産価格論において、最も基本的なレベルに属する部分だけに内容を絞ることで、分量を抑えてある。証明プロセスのベースは二階堂（1961）であるが、説明が省略されている箇所を補い、また用語も今のものにアップデートしている。二階堂（1961）はすでに絶版なので、その欠を補うことも企図されている。

第 1 節（永原担当）では、数学的議論が展開される。ここが上で述べた本稿の主要な貢献部分である。

第 2 節（江原担当）では、すでに広く知られていることであるが、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的意味を述べ、第 1 節の貢献をマルクス経済学の研究の観点から補強する。さらに、2 部門の一般的なケースで、Hawkins-Simon の条件の経済学的性質の解説、「マルクスの基本定理」および Perron-Frobenius の定理の証明を与える。これによって、高校数学「数学 I」までの範囲で、Hawkins-Simon の条件と Perron-Frobenius の定理の経済学的エッセンスはフォローできる。

1. 数学的議論

1.1. Hawkins-Simon の条件

1.1.1. 一次方程式系

以下のような n 元連立 1 次方程式を考える。

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1i}x_i + \cdots + b_{1n}x_n = c_1 \\ \dots \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{ii}x_i + \cdots + b_{in}x_n = c_i \\ \dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{ni}x_i + \cdots + b_{nn}x_n = c_n \end{cases} \quad (1.1.1)$$

ここで、係数行列を $B = (b_{ij})$ 、縦ベクトルを $\mathbf{c} = {}^t(c_1, c_2, \dots, c_n)$ などと表せば、方程式 (1.1.1) は

$$B\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

の形であらわせる。係数 b_{ij} に次のような条件を付ける。

非対角成分の非正条件

$$b_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1.2)$$

ここでは、 B の対角成分 b_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) について特に条件をつけないものとして証明を進めよう。

1.1.2. Hawkins-Simon の条件

ここでは、方程式 (1.1.1) において、非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ の各成分が $c_i \geq 0$ を満たすとき、非負の解 $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を持つ係数行列 B の十分条件を調べよう。以降、表現を簡潔にするため、行列 $B = (b_{ij})$ に含まれる全ての成分 b_{ij} が、定符号、あるいは非負値、非正値であることをそれぞれ $B > 0$, $B < 0$, $B \geq 0$, $B \leq 0$ と記すこととする。ベクトル $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ に対しても同様の記法を適用する。例えば、 $\mathbf{x} > 0$ と表したら $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ を意味する。

初めに、主座小行列について定義しよう。ここでは、実数 \mathbb{R} を成分に持つ n 次正方形行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ と書く。なお、 $\mathbb{R}^{n \times n}$ も、同じく n 次正方形行列全体の集合を表す意味でよく使われる。

定義 1 (k 次首座小行列) $B \in M_n(\mathbb{R})$ 、および $1 \leq k \leq n$ に対して、

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

を、 B の k 次首座小行列といい、 B_k の行列式

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

を、 B の k 次首座小行列式という。なお、 B の n 次首座小行列 B_n は、 B と等しい。

これを用いると、Hawkins-Simon の条件を以下のように記述できる。

条件 1 (Hawkins-Simon の条件)

方程式 (1.1.1) の係数行列 $B = (b_{ij})$ の k 次首座小行列式 $|B_k|$ に対して、

$$|B_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

が成立する。

すなわち、条件 1 は、係数行列 B の全ての首座小行列式が正の値を取るという条件である。

1.1.3. Hawkins-Simon の条件と非負値解

続いて、方程式 (1.1.1) の解を特徴づける 2 つの条件を述べよう。

条件 2 方程式 (1.1.1) は、ある 1 つの非斉次項 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ に対して、非負値解 $\mathbf{x}_c \geq \mathbf{0}$ を持つ。

条件 3 方程式 (1.1.1) は、任意の非斉次項 $\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ に対して、非負値解 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ を持つ。

じつは、方程式 (1.1.1) における係数行列 B が Hawkins-Simon の条件を満たすことと、方程式 (1.1.1) の解が条件 2、3 を満たすことは同値である。以下、これを定理の形でまとめて証明しよう。

定理 1 方程式 (1.1.1) において、条件 1、条件 2、条件 3 は互いに同値である。

Proof. 数学的帰納法を用いて、全ての n の場合に、条件 2 \Rightarrow 条件 1 \Rightarrow 条件 3 \Rightarrow 条件 2 \cdots (*) が成り立つことを証明すればよい。

$n = 1$ の場合：

(条件 2 \Rightarrow 条件 1) を示す。方程式 (1.1.1) は $b_{11}x_1 = c_1$ と表される。条件 2 を仮定すると、ある $c_1 > 0$ に対して $x_1 \geq 0$ が存在する。ここで、 $b_{11}x_1 = c_1 > 0$ より $b_{11} \neq 0, x_1 \neq 0$ となるから、 $x_1 > 0$ である。従って、 $b_{11} = c_1/x_1 > 0$ を得る。一方、条件 1 は $n = 1$ の場合 $|B| = b_{11} > 0$ であるから、先ほどの計算より条件 1 が成立している。

(条件 1 \Rightarrow 条件 3) を示す。条件 1 より $|B| = b_{11} > 0$ であるから、 $x_1 = c_1/b_{11}$ である。従って、任意の $c_1 \geq 0$ に対して、 $x_1 \geq 0$ となるので、条件 3 が成立する。

(条件 3 \Rightarrow 条件 2) は、条件の主張から明らかである。従って、 $n = 1$ のときに、(*) が成り立つことが示された。

n が 2 以上の整数の場合：

数学的帰納法により、 $n - 1$ のとき、(*) が成立すると仮定する。このとき、 n において、(*) が成立することを示せばよい。

(条件 2 \Rightarrow 条件 1) を示す。条件 2 より、ある 1 つの非斉次項 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ に対して、対応する非負値解 $\mathbf{x}_c \geq \mathbf{0}$ が存在する。すなわち、

$$B\mathbf{x}_c = \mathbf{c}.$$

ここで、非負値解 \mathbf{x}_c の各成分を $x_{c,i} (i = 1, 2, \dots, n)$ と書くと、 $x_{c,i} \geq 0$ であることに注意しよう。方程式 (1.1.1) の第 1 式

$$b_{11}x_{c,1} + b_{12}x_{c,2} + \cdots + b_{1i}x_{c,i} + \cdots + b_{1n}x_{c,n} = c_1$$

を変形すれば、

$$b_{11}x_{c,1} = c_1 - \sum_{j=2}^n b_{1j}x_{c,j}$$

この時、右辺第 2 項について、非対角成分の非正条件から、 $b_{1j} \leq 0 (j = 2, 3, \dots, n)$ であり、条件 2 より $x_{c,j} \geq 0 (j = 2, 3, \dots, n)$ であるから、

$$-\sum_{j=2}^n b_{1j}x_{c,j} \geq 0$$

である。従って、 $b_{11}x_{c,1} \geq c_1$ である。今、 $c_1 > 0$ であるから、 $b_{11} \neq 0$ 、 $x_{c,1} \neq 0$ となる。すなわち条件 2 より、 $x_{c,1} > 0$ 、 $b_{11} > 0$ である。

次に、係数行列 B に対して行基本変形（左基本変形）を行い、方程式 (1.1.1) から x_1 を消去する。すなわち、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & c_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22} - b_{12}b_{21}/b_{11} & \dots & b_{2n} - b_{1n}b_{21}/b_{11} & c_2 - c_1b_{21}/b_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2} - b_{12}b_{n1}/b_{11} & \dots & b_{nn} - b_{1n}b_{n1}/b_{11} & c_n - c_1b_{n1}/b_{11} \end{array} \right)$$

なお、この行基本変形は、第 i 行 ($i = 2, 3, \dots, n$) に、第 1 行の $-b_{i1}/b_{11}$ 倍を足したものである。¹ 第 2 行、第 2 列以降の成分について、

$$b_{ij}^* := b_{ij} - \frac{b_{1j}b_{i1}}{b_{11}}, \quad c_i^* := c_i - \frac{c_1b_{i1}}{b_{11}} \quad (i, j = 2, 3, \dots, n)$$

とおき直す。ここで、 $B^* \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ 、 $\mathbf{c}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ を用いて、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & b_{22}^* & \dots & b_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n2}^* & \dots & b_{nn}^* & c_n^* \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & B^* & & \\ 0 & & & & \mathbf{c}^* \end{array} \right)$$

と書くことにする。このことは、行基本変形の定義により、ある正則行列 P が存在して、

$$PB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad P\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \mathbf{c}^* \end{pmatrix}$$

と書けることに他ならない。つまり、ここまでの操作は方程式 (1.1.1) を、

$$B\mathbf{x}_c = \mathbf{c} \Leftrightarrow PB\mathbf{x}_c = P\mathbf{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mathbf{x}_c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \mathbf{c}^* \end{pmatrix}$$

の形に書き換えたことに相当する。従って、第 1 行の方程式を変形すれば、

$$x_{c,1} = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}x_{c,j}}{b_{11}}$$

であり、 $x_{c,1}$ が $x_{c,i}$ ($i = 2, 3, \dots, n$) を用いて表せたことになる。その上 $x_{c,i}$ ($i = 2, 3, \dots, n$) は、方程式

¹ 非対角成分が 0 となる可能性があるため、このように一度に変形する手続きとなる。

$$B^* \begin{pmatrix} x_{c,2} \\ x_{c,3} \\ \vdots \\ x_{c,n} \end{pmatrix} = \mathbf{c}^* \quad (1.1.3)$$

の解でもある。

ここで、方程式 (1.1.3) の係数行列 B^* と非斉次項 \mathbf{c}^* の符号について確認しよう。 $i, j = 2, 3, \dots, n$ に対し、非対角成分の非正条件から、 $b_{i1} \leq 0$ 、 $b_{1j} \leq 0$ であり、 $b_{11} > 0$ であるから、 $b_{1j}b_{i1}/b_{11} \geq 0$ となる。すなわち、

$$b_{ij}^* = b_{ij} - \frac{b_{1j}b_{i1}}{b_{11}} \leq b_{ij}$$

である。特に、 $i \neq j$ の時は、 $b_{ij} \leq 0$ であるから、

$$b_{ij}^* \leq 0 \quad (i \neq j, i, j = 2, 3, \dots, n)$$

となる。さらに、 $c_1 > 0$ であるから、 $c_1 b_{i1}/b_{11} \leq 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$)、すなわち、

$$c_i^* = c_i - \frac{c_1 b_{i1}}{b_{11}} > c_i > 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (1.1.4)$$

となる。すなわち、方程式 (1.1.3) は、非対角成分の非正条件を満たし、ある正の非斉次項 $\{c_i^*\}_{i=2}^n > 0$ に対し、非負値解 $x_{c,i} \geq 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) を持つ $n - 1$ 元連立 1 次方程式である。このとき帰納法の仮定により、方程式 (1.1.3) は条件 1 が成立する。すなわち、 B^* の k 次首座小行列式 $|B_k^*|$ に対して、

$$|B_k^*| = \begin{vmatrix} b_{2,2}^* & \cdots & b_{2,k+1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k+1,2}^* & \cdots & b_{k+1,k+1}^* \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

である。ここで、行基本変形においては、ある行に他の行の定数倍を加えても、行列式の値は変わらないので、 B の k 次首座小行列式 $|B_k|$ は、 $2 \leq k \leq n$ のとき、

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} - b_{12}b_{21}/b_{11} & \cdots & b_{2k} - b_{1k}b_{21}/b_{11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k2} - b_{12}b_{k1}/b_{11} & \cdots & b_{kk} - b_{1k}b_{k1}/b_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22}^* & \cdots & b_{2k}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k2}^* & \cdots & b_{kk}^* \end{vmatrix}$$

となる。従って、第 1 列で展開すれば、 $b_{11} > 0$ から

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ 0 & b_{22}^* & \cdots & b_{2k}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{k2}^* & \cdots & b_{kk}^* \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22}^* & \cdots & b_{2k}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k2}^* & \cdots & b_{kk}^* \end{vmatrix} = b_{11} |B_{k-1}^*| > 0$$

が成り立つので、 $|B_k| > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) となり、条件 1 が成り立つことが示された。

(条件 1 \Rightarrow 条件 3) を示す。任意の非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ で、 $\mathbf{c} \geq 0$ を満たすものを取る。条件より、方程式 (1.1.1) の係数行列 B の k 次首座小行列式 $|B_k| > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) が成立する。従って、 $|B| = |B_n| > 0$ であるから、 B の逆行列 B^{-1} が存在する。ゆえに、方程式 (1.1.1) はただ一つの解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を持つ。この解を $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表す。また、ここで、 $|B_1| = b_{11} > 0$ に注意して、 $\mathbf{x}^* = {}^t(x_2, x_3, \dots, x_n)$ と表すこととすれば、方程式 (1.1.1) から x_1 を消去するときと同様の行基本変形により、

$$B\mathbf{x} = \mathbf{c} \Leftrightarrow PB\mathbf{x} = P\mathbf{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B^* & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathbf{x}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \mathbf{c}^* \end{pmatrix}$$

と計算できる。従って、 \mathbf{x} の各成分 $\{x_i\}_{i=1}^n$ はそれぞれ、

$$x_1 = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}x_j}{b_{11}} \quad (1.1.5)$$

$$B^*\mathbf{x}^* = \mathbf{c}^* \quad (1.1.6)$$

と表せる。次に、方程式 (1.1.6) の係数行列 B^* が条件 1 を満たすことを示そう。先ほどと同様の計算より、 $2 \leq k \leq n$ に対して、

$$|B_k| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = b_{11}|B_{k-1}^*| > 0$$

であるから、 $B^* \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ の k 次首座小行列式に対して、

$$|B_k^*| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

が成立し、 B^* は条件 1 を満たす。

従って、帰納法の仮定より、係数行列 B^* が条件 1 を持つ方程式

$$B^*\mathbf{y}^* = \hat{\mathbf{c}} \quad (1.1.7)$$

は、 $\hat{\mathbf{c}} \geq 0$ を満たす任意の非斉次項 $\hat{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対し、ただ一つの非負値解 $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ を持つ。ここで、不等式 (1.1.4) より $\mathbf{c}^* \geq 0$ が成立するため、 $\hat{\mathbf{c}}$ に \mathbf{c}^* を代入すれば、方程式 (1.1.6) と (1.1.7) は一致する。方程式 (1.1.7) の非負値解 $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ はただ一つであるため、これは $\mathbf{y}^* = \mathbf{x}^*$ であることに他ならない。故に、 $x_i \geq 0$ ($i = 2, 3, \dots, n$) が示された。

さらに、 $b_{1j} \leq 0$ ($j = 2, 3, \dots, n$)、 $b_{11} > 0$ であるから、 x_1 を表す等式 (1.1.5) より、

$$x_1 = \frac{c_1}{b_{11}} - \sum_{j=2}^n \frac{b_{1j}x_j}{b_{11}} > \frac{c_1}{b_{11}} \geq 0$$

となるので、 $\mathbf{x} \geq 0$ が示された。

(条件 3 \Rightarrow 条件 2) は明らかであるので、省略する。以上から、定理の結論を得る。

□

1.1.4. Hawkins-Simon の条件と逆行列の非負値性

実は、方程式 (1.1.1) において、条件 1 から条件 3 と同値の条件がもう一つある。

条件 4 方程式 (1.1.1) の係数行列 $B = (b_{ij})$ は、全ての成分が非負である逆行列 B^{-1} を持つ。

定理2 方程式 (1.1.1) において、条件1、条件2、条件3、条件4は互いに同値である。

Proof. 条件1 \Rightarrow 条件4 \Rightarrow 条件3を示せば、定理1から全ての定理が同値であることが示される。

(条件1 \Rightarrow 条件4)を示す。方程式 (1.1.1) の係数行列 B は、条件1を仮定しているので $|B| > 0$ であり、逆行列 B^{-1} を持つ。定理1より、条件1が成立すれば条件3も成立するので、任意の非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ で、 $\mathbf{c} \geq 0$ を満たすものをとれば、方程式 (1.1.1) は非負値解 $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^n$ を持つ。

ここで、逆行列を $B^{-1} = (\beta_{ij})$ 、非負値の非斉次項を $\mathbf{c} = {}^t(c_1, c_2, \dots, c_n)$ 、非負値解を $\mathbf{x}_c = {}^t(x_{c,1}, x_{c,2}, \dots, x_{c,n})$ と書けば、

$$\mathbf{x}_c = B^{-1}\mathbf{c} \quad (1.1.8)$$

である。ここで、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ は非負値であれば任意であるので、任意の $j = 1, 2, \dots, n$ に対し、 $\mathbf{c} = \mathbf{e}_j = {}^t(0, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ とおけば、

$$\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j} = B^{-1}\mathbf{e}_j$$

となる。すると、

$$B^{-1}\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}$$

となるから、左辺の $\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j}$ と各成分を比較すれば、

$$\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j, i} = \beta_{ij}$$

である。条件3より、 $\mathbf{x}_{\mathbf{e}_j, i} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) であるから、 $\beta_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる。従って、全ての $j = 1, 2, \dots, n$ に対して同様の操作を行うことで、 $\beta_{ij} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を得る。

(条件4 \Rightarrow 条件3)を示す。任意の非負値な非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ を取る。方程式 (1.1.8) の右辺を計算すると、各行について

$$x_{\mathbf{c}, i} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} c_j$$

と表される。条件4より、 $B^{-1} \geq 0$ と仮定すると、 $\mathbf{c} \geq 0$ であるので

$$x_{\mathbf{c}, i} = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} c_j \geq 0$$

となる。従って、解は $\mathbf{x}_c \geq 0$ を満たし、条件3が成立する。

□

以降、これら4つの条件は全て同値であるので、これらを満たす方程式 (1.1.1) の係数行列を、**Hawkins-Simon の条件を満たす係数行列**などと呼ぶことにする。

1.2. Perron-Frobenius の定理

1.2.1. Frobenius 根

$A \in M_n(\mathbb{R})$ を任意の非負行列とする。すなわち、 $A = (a_{ij}) \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) を満たしている。 $I \in M_n(\mathbb{R})$ を n 次単位行列とする。すなわち、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i = j) \\ 0 & \text{if } (i \neq j) \end{cases}$$

を用いて、 $I = (\delta_{ij})$ で表せる。 δ_{ij} をクロネッカーのデルタという。

$\rho \in \mathbb{R}$ を任意にとり、 $B_\rho = \rho I - A$ とおく。このとき、 $B_\rho = (b_{\rho,ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ は、 $a_{ij} \geq 0$ であるから $b_{\rho,ij} = -a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) となり、非対角成分の非正值性を満たしている。すなわち、第 1.1 節で考えた方程式 (1.1.1) の係数行列 B に $B_\rho = \rho I - A$ を適用することで得られる方程式

$$(\rho I - A)\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{1.2.1}$$

に対しては、 $B_\rho = \rho I - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たせば、第 1.1 節で証明した定理 2 が適用できることとなる。

ここまでの設定により、 B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たすかどうかは、 ρ にのみ依存して決定される。このような $\rho \in \mathbb{R}$ の分布に関する、次の重要な定理を証明する。

定理 3 ある $\rho^* > 0$ が存在し、任意の $\rho \geq \rho^*$ に対して、方程式 (1.2.1) の係数行列 B_ρ は、Hawkins-Simon の条件を満たす。

Proof. いくつかのステップに分けて証明を行う。

Step 1. B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たすような $\rho \in \mathbb{R}$ が少なくとも一つ存在する。

(Step 1 の証明) 任意の正値ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を一つ選ぶ。このとき方程式 (1.2.1) の左辺を具体的に表すと、

$$\begin{aligned} (\rho I - A)\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \rho - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \rho - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \rho - a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= {}^t \left(\rho x_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \rho x_n - \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、ある集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ の要素のうち、最大のものを $\max A$ 、あるいは $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}$ と書くことにする。このとき、全ての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} x_j}{x_i} \right\} \geq \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} x_j}{x_i}$$

であるから、 ρ^* を

$$\rho^* > \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}x_j}{x_i} \right\}$$

を満たすように取れば、全ての $i = 1, 2, \dots, n$ に対し

$$\left| \rho^* x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}x_j}{x_i} \right) x_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \right.$$

となり、方程式 (1.2.1) の全ての成分が正となる。このとき、非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ として

$$\mathbf{c} = {}^t \left(\rho^* x_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \rho^* x_n - \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$$

と選べば、 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ であり、方程式 (1.2.1) は $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ を解に持つ。従って条件 2 を満たすので、係数行列 B_{ρ^*} は Hawkins-Simon の条件を満たす。

Step 2. 方程式 (1.2.1) の係数行列 B_{ρ^*} が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、 $\rho \geq \rho^*$ に対する係数行列 B_ρ も Hawkins-Simon の条件を満たす。

(Step 2 の証明) B_{ρ^*} が Hawkins-Simon の条件を満たしているため、方程式 (1.2.1) は条件 2 より、ある正値のベクトル $\mathbf{c}^* \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$B_{\rho^*} \mathbf{x}^* = \mathbf{c}^* \tag{1.2.2}$$

を満たす非負値解 $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ を持つ。

ここで、 $\rho > \rho^*$ を満たす任意の ρ に対し、

$$\mathbf{c} = (\rho - \rho^*) I \mathbf{x}^* + \mathbf{c}^*$$

とおく。仮定より、 $\rho - \rho^* > 0$ となるから、 $(\rho - \rho^*) I \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ 。また、 $\mathbf{c}^* > \mathbf{0}$ より、 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ が成り立つ。

さらに、 $B_{\rho^*} \mathbf{x}^* - \mathbf{c}^* = \mathbf{0}$ であるから、

$$\begin{aligned} B_\rho \mathbf{x}^* &= B_{\rho^*} \mathbf{x}^* - (B_{\rho^*} \mathbf{x}^* - \mathbf{c}^*) \\ &= \{(\rho I - A) - (\rho^* I - A)\} \mathbf{x}^* + \mathbf{c}^* \\ &= (\rho - \rho^*) I \mathbf{x}^* + \mathbf{c}^* = \mathbf{c} \end{aligned}$$

となるので、係数行列 B_ρ はある非斉次項 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ に対して、非負値解 \mathbf{x}^* を持つ。これは条件 2 に他ならず、従って定理 2 より Hawkins-Simon の条件を満たす。

Step 3. 方程式 (1.2.1) の係数行列 B_{ρ^*} が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、 $\rho^* > 0$

(Step 3 の証明) 背理法で証明する。 $\rho^* \leq 0$ と仮定する。 B_{ρ^*} は Hawkins-Simon の条件を満たすため、条件 2 より、ある正値の非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $B_{\rho^*} \mathbf{x} = \mathbf{c}$ を満たす非負値解 \mathbf{x}_c が存在する。

一方、任意の非負値を取るベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $A \geq \mathbf{0}$ であるから、

$$B_{\rho^*} \mathbf{x} = (\rho I - A) \mathbf{x} = \rho I \mathbf{x} - A \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

となるが、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ とすると、 $B_{\rho^*} \mathbf{x} = \mathbf{c} > \mathbf{0}$ となる非斉次項 \mathbf{c} の存在に矛盾する。

定理 3 より、係数行列 B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たす $\rho \in \mathbb{R}$ 全体からなる集合 $B(P)$ は区間であり、下に有界である。よって、実数の連続性公理により、区間 $B(P)$ の下限 $\rho^* \geq 0$ が存在する。なお、区間 $B(P)$ の下限とは、 $B(P)$ に属す実数がぎりぎり近づける値のことである。例えば区間 $x > 1$ の下限は 1 である。実は、この下限 ρ^* が、係数行列 B_ρ が Hawkins-Simon の条件を満たすかどうかの閾値である **Frobenius 根** に相当する。しかし定理 3 では、 ρ^* がどのように与えられるのかについては触れられておらず、詳細をより明らかにするには、いくつかの準備が必要となる。

1.2.2. 固有値問題

一般の行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して、方程式

$$Ax = \lambda x \quad (1.2.3)$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{C}$ 、及び $x \neq \mathbf{0}$ が存在するとき、 λ を固有値、 x を λ に対する固有ベクトルと呼ぶ。 A の固有値全体を $\sigma_p(A)$ と表す。 n 次単位行列 I を用いて $\lambda x = \lambda Ix$ となることに注意して、固有値問題 (1.2.3) を書き換えると、

$$(\lambda I - A)x = \mathbf{0} \quad (1.2.4)$$

となる。固有値問題 (1.2.3) において、 λ が固有値であることは、左辺の逆行列 $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在しないことと同値である。なぜなら、 $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在する場合は、固有値問題 (1.2.3) に左から $(\lambda I - A)^{-1}$ を掛ければ

$$(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)^{-1}\mathbf{0}$$

が得られる。すなわち、 $x = \mathbf{0}$ となり、 $x \neq \mathbf{0}$ に矛盾する。左辺の逆行列 $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在しない条件は、 $|\lambda I - A| = 0$ であるから、 λ が固有値であることは、 $\varphi(\lambda) = |\lambda I - A|$ と書けば、 λ が方程式

$$\varphi(\lambda) = 0 \quad (1.2.5)$$

の解となることと同値である。この $\varphi(\lambda)$ を A の固有多項式、あるいは特性多項式といい、方程式 (1.2.5) を A の固有方程式や特性方程式とよぶ。

$A \in M_n(\mathbb{R})$ の場合、 A の固有多項式 $\varphi(\lambda)$ は実数係数の n 次多項式である。よって、 A の固有方程式は実数係数の n 次方程式となる。そのため、解 λ は、代数学の基本定理により、重複を許せば n 個であり、一般には複素数で、固有ベクトル x も成分が複素数となる。

ここまでの準備で、 A の固有値全体の集合 $\sigma_p(A)$ は

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0\}$$

と書くことができ、 A の固有値全体 $\sigma_p(A)$ の要素の個数は、重複を許せば n 個であることが分かる。

実は、 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が非負行列の場合は、非負の固有値 $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する。しかも、非負の固有値の中で最大の固有値に対応する固有ベクトルで、各成分は 0 以上の実数となるものが存在するという著しい性質を持つ。

1.2.3. Perron-Frobenius の定理

以降、2 つの行列 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ に対し、 $A - B \leq 0$ 、 $A - B < 0$ であることを、それぞれ $A \leq B$ 、 $A < B$ と書く。これの逆向きの不等号や、ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対しても、同様の表記を用いる。さらに、行列 A の全

ての成分が $\mathbf{0}$ であることを $A = \mathbf{O}$ と記し、ベクトル \mathbf{x} についても同様に $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ と表す。

定理 4 (Perron-Frobenius の定理) $A \in M_n(\mathbb{R})$ を非負行列とする。このとき、以下の 2 つの主張が成り立つ。

Claim 1. A は非負固有値をもち、それらの中で最大のものを $\lambda(A)$ とすれば、 $\lambda(A)$ に対応する固有ベクトル \mathbf{x} の各成分は実数からなり、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ となるものが存在する。

Claim 2. $B_\rho = \rho I - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすための必要十分条件は、 $\rho > \lambda(A)$ である。

A の非負固有値のうち最大の固有値 $\lambda(A)$ を A の Frobenius 根という。

注意 1 固有値 λ に対する固有ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ は、一つ見つければ少なくともその定数倍も固有ベクトルとなる。これは、固有値問題 (1.2.3) の両辺に 0 でない定数 μ を掛ければ、

$$\mu A\mathbf{x} = \mu\lambda\mathbf{x} \iff A(\mu\mathbf{x}) = \lambda(\mu\mathbf{x})$$

となり、 $\mu\mathbf{x}$ もまた λ に対する固有ベクトルとなる。従って、固有ベクトル \mathbf{x} 全体と $\mathbf{0}$ からなる線形空間 W_λ の次元 (W_λ に属する任意のベクトル \mathbf{v} を線形結合の形で表すために必要な最小のベクトルの数) は 1 以上である。なお、 μ は一般には複素数としてよく、この事実は第 1.3 節において活用される。

定理 4 の証明の前に、いくつかの準備が必要となる。行列から同じ数の行または列を選んで並べてできる行列を正方小行列という。これについての記号を用意しよう。

定義 2 (正方小行列) 行列 $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ の行から s 個の行 i_1, i_2, \dots, i_s ($1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq n$) を選び、 s 個の列 j_1, j_2, \dots, j_s ($1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq n$) を選んで作った s 次正方行列を

$$\begin{pmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & \cdots & b_{i_1 j_s} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} & \cdots & b_{i_2 j_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_s j_1} & b_{i_s j_2} & \cdots & b_{i_s j_s} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$$

と書く。これを B の s 次正方小行列という。また、この行列式を

$$\left| B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix} \right|$$

と書き、これを B の s 次正方小行列式という。

注意 2 ある行列から何かしらの行、または列を抜き出した行列についての定義は、文献によって異なっており、混乱の元となるので、都度確認した方がよい。

方程式 (1.1.1) の係数行列 B の正方小行列に関する、次の補題を用意する。

補題 1 方程式 (1.1.1) の係数行列 $B \in M_n(\mathbb{R})$ が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、 B の s 次正方小行列

$$B^{\{i_s\}} = B \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_s \end{pmatrix}$$

も Hawkins-Simon の条件を満たす。

Proof. 仮定より、方程式 (1.1.1) は条件 2 を満たす。すなわち、ある非斉次項 $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ 、に対して、非負値解 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ が存在する。以降、この非斉次項 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ 、及び非負値解 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ を固定する。また、狭義単調増加な数列 $\{i_p\}_{p=1}^s \subset \{1, 2, \dots, n\}$ 、 $\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ を、 $\{i_p\}_{p=1}^s \cup \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \{1, 2, \dots, n\}$ 、 $\{i_p\}_{p=1}^s \cap \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \emptyset$ と定義する。すなわち、 $\{i_p\}_{p=1}^s$ 、 $\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$ はそれぞれ

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq n, \quad 1 \leq i_1^* < i_2^* < \cdots < i_{n-s}^* \leq n$$

を満たし、 $\{i_p\}_{p=1}^s$ 、および $\{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$ の合計 n 個の数を昇順に並べたら、 $1, 2, \dots, n$ と並ぶように設定する。次に、方程式 (1.1.1) の拡大係数行列を、次のような行基本変形により、行を並べ替える。

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} & b_{1s+1} & \cdots & b_{1n} & c_1 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} & b_{2s+1} & \cdots & b_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{ss} & b_{ss+1} & \cdots & b_{sn} & c_s \\ b_{s+11} & b_{s+12} & \cdots & b_{s+1s} & b_{s+1s+1} & \cdots & b_{s+1n} & c_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} & b_{ns+1} & \cdots & b_{nn} & c_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \cdots & b_{i_1 s} & b_{i_1 s+1} & \cdots & b_{i_1 n} & c_{i_1} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \cdots & b_{i_2 s} & b_{i_2 s+1} & \cdots & b_{i_2 n} & c_{i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i_s 1} & b_{i_s 2} & \cdots & b_{i_s s} & b_{i_s s+1} & \cdots & b_{i_s n} & c_{i_s} \\ b_{i_1^* 1} & b_{i_1^* 2} & \cdots & b_{i_1^* s} & b_{i_1^* s+1} & \cdots & b_{i_1^* n} & c_{i_1^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{i_{n-s}^* 1} & b_{i_{n-s}^* 2} & \cdots & b_{i_{n-s}^* s} & b_{i_{n-s}^* s+1} & \cdots & b_{i_{n-s}^* n} & c_{i_{n-s}^*} \end{pmatrix}$$

さらに、行基本変形した方程式 (1.1.1) の各行について、項の順番を非負値解 \mathbf{x} の成分が

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}, x_{i_1^*}, \dots, x_{i_{n-s}^*}$$

となるように並べ替えれば、方程式 (1.1.1) は

$$\begin{cases} b_{i_1 i_1} x_{i_1} + b_{i_1 i_2} x_{i_2} + \cdots + b_{i_1 i_s} x_{i_s} + b_{i_1 i_1^*} x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_1 i_{n-s}^*} x_{i_{n-s}^*} = c_{i_1} \\ \dots \\ b_{i_s i_1} x_{i_1} + b_{i_s i_2} x_{i_2} + \cdots + b_{i_s i_s} x_{i_s} + b_{i_s i_1^*} x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_s i_{n-s}^*} x_{i_{n-s}^*} = c_{i_s} \\ b_{i_1^* i_1} x_{i_1} + b_{i_1^* i_2} x_{i_2} + \cdots + b_{i_1^* i_s} x_{i_s} + b_{i_1^* i_1^*} x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_1^* i_{n-s}^*} x_{i_{n-s}^*} = c_{i_1^*} \\ \dots \\ b_{i_{n-s}^* i_1} x_{i_1} + b_{i_{n-s}^* i_2} x_{i_2} + \cdots + b_{i_{n-s}^* i_s} x_{i_s} + b_{i_{n-s}^* i_1^*} x_{i_1^*} + \cdots + b_{i_{n-s}^* i_{n-s}^*} x_{i_{n-s}^*} = c_{i_{n-s}^*} \end{cases}$$

のように変形できる。すなわち、次の方程式 (1.2.6)

$$\begin{pmatrix} b_{i_1 i_1} & b_{i_1 i_2} & \cdots & b_{i_1 i_s} & b_{i_1 i_1^*} & \cdots & b_{i_1 i_{n-s}^*} \\ b_{i_2 i_1} & b_{i_2 i_2} & \cdots & b_{i_2 i_s} & b_{i_2 i_1^*} & \cdots & b_{i_2 i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_s i_1} & b_{i_s i_2} & \cdots & b_{i_s i_s} & b_{i_s i_1^*} & \cdots & b_{i_s i_{n-s}^*} \\ b_{i_1^* i_1} & b_{i_1^* i_2} & \cdots & b_{i_1^* i_s} & b_{i_1^* i_1^*} & \cdots & b_{i_1^* i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_{n-s}^* i_1} & b_{i_{n-s}^* i_2} & \cdots & b_{i_{n-s}^* i_s} & b_{i_{n-s}^* i_1^*} & \cdots & b_{i_{n-s}^* i_{n-s}^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_s} \\ x_{i_1^*} \\ \vdots \\ x_{i_{n-s}^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_s} \\ c_{i_1^*} \\ \vdots \\ c_{i_{n-s}^*} \end{pmatrix} \iff \hat{B}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{c}} \quad (1.2.6)$$

が得られる。ここで、方程式 (1.2.6) の非斉次項 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 、および解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ は、元の方程式 (1.1.1) の正値非斉次項 \boldsymbol{c} 、およびそれに対応する非負値解 \boldsymbol{x} の要素の並べ替えであるので、方程式 (1.2.6) もまた条件 2 を満たす。すなわち、係数行列 \hat{B} は Hawkins-Simon の条件を満たす。

ここで、係数行列 \hat{B} の k 次首座小行列 \hat{B}_k は、係数行列 \hat{B} が Hawkins-Simon の条件を満たすことより、

$$|\hat{B}_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

となる。また、 $k = s$ とすれば、

$$\hat{B}_s = B^{\{i_s\}}$$

であるから、 B の s 次正方小行列 $B^{\{i_s\}}$ の k 次首座小行列 $B_k^{\{i_s\}}$ と \hat{B} の k 次首座小行列 \hat{B}_k は、 $1 \leq k \leq s$ において一致する。従って、

$$|B_k^{\{i_s\}}| = |\hat{B}_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s)$$

となるので、 $B^{\{i_s\}}$ も Hawkins-Simon の条件を満たすことが示された。

□

この補題をもとに、定理 4 を n についての数学的帰納法で証明しよう。

Step 1. $n = 1$ 、すなわち $A \in M_1(\mathbb{R})$ の場合を証明しよう。初めに **Claim 1** を示す。固有方程式 (1.2.4) は $(\lambda - a_{11})x_1 = 0$ となる。 λ が固有値となるのは、 λ が固有方程式 (1.2.5) の解となるときであるから、

$$\varphi(\lambda) = \lambda - a_{11} = 0,$$

すなわち $\lambda = a_{11}$ が固有値である。今、条件より $A \geq 0$ であるので

$$\lambda = a_{11} \geq 0$$

従って、全ての固有値は非負であり、その中で最大の（実際にはただ一つの）固有値は、 $\lambda(A) = a_{11}$ となる。

次に、固有値 $\lambda(A) = a_{11}$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ が $\boldsymbol{x} \geq 0$ であることを示そう。固有方程式 (1.2.4) より

$$(\lambda(A) - a_{11})x_1 = 0$$

であり、 $\lambda(A) - a_{11} = 0$ であるから、固有値 $\lambda(A) = a_{11}$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ は $\mu \neq 0$ を用いて $x_1 = \mu \cdot 1$ と表せる。従って、固有ベクトルは $\boldsymbol{x} \geq 0$ である。なお、 $n = 1$ の場合は成分が 1 つのみであるから、 $\boldsymbol{x} > 0$ となる。

続いて、**Claim 2** を示す。 $B_\rho = \rho I - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすと仮定する。 $n = 1$ より、方程式 (1.1.1) は

$$(\rho - a_{11})x_1 = c_1$$

と表される。このとき条件3より、任意の $c_1 \geq 0$ に対して、 $x_1 \geq 0$ となる条件は、 $\rho - a_{11} \geq 0$ である。さらに、条件1より、 $\rho - a_{11} \neq 0$ 。従って、 $\rho - a_{11} > 0$ であるから、 $\rho > a_{11}$ となる。一方 $\lambda(A) = a_{11}$ であるから、 $\rho > \lambda(A)$ である。

逆に、 $\rho > \lambda(A)$ と仮定する。 $\lambda(A) = a_{11}$ であるから、 $\rho - a_{11} > 0$ となる。これは $|\rho I - A| > 0$ そのものであり、条件1である Hawkins-Simon の条件を満たす。以上より、 $n = 1$ の時が示された。

Step 2-1 次に、 $A \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ のときに定理の主張が成り立つと仮定する。以降、混乱を避けるため、 n 次単位行列を I_n 、 $n - 1$ 次単位行列を I_{n-1} と表記する。

今度は、**Claim 2** から証明しよう。 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ をとる。 A の第 i 行、第 i 列を取り除いた $n - 1$ 次正方小行列を

$$A_i^- = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

と表す。このとき、 $A_i^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ は、定義から $A_i^- \geq 0$ であるため、帰納法の仮定より、Frobenius 根 $\lambda(A_i^-) \geq 0$ をもち、 $\lambda(A_i^-)$ に対応する固有ベクトル \mathbf{x} で、各成分が実数からなり、 $\mathbf{x} \geq 0$ であるものが存在する。さらに、 $n - 1$ 元連立 1 次方程式 (1.1.1) の係数行列 $\rho I_{n-1} - A_i^-$ が Hawkins-Simon の条件を満たすための必要十分条件は、 $\rho > \lambda(A_i^-)$ である。

$\lambda \in \mathbb{R}$ を、次のように定義する。

$$\lambda = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-), \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\} \right\} \quad (1.2.7)$$

ここで、 $\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$ は常に成り立ち、 $\lambda(A_i^-) \geq 0$ より、 $\lambda \geq 0$ である。 $\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ は、 A の固有値のうち実数のもの全体を表している。もし $\sigma_p(A) \cap \mathbb{R} = \emptyset$ でなければ、 $\lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ も成り立つ。

$\rho > \lambda$ であるとき、 $\rho I_n - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすことを示そう。今、

$$\rho > \lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-) \geq \lambda(A_n^-)$$

が成立するので、 $\rho I_{n-1} - A_n^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ は、帰納法の仮定から Hawkins-Simon の条件を満たす。その上、 $\rho I_{n-1} - A_n^-$ は $\rho I_n - A$ の $n - 1$ 次首座小行列であるから、 $\rho I_n - A$ の首座小行列 $(\rho I_n - A)_k$ に対し、

$$|(\rho I_n - A)_k| > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1)$$

が示されたことになる。

残りは、 $\rho > \lambda$ のときに $|\rho I_n - A| > 0$ が成り立てば、 $\rho I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たすことが示される。これを背理法で証明する。 $|\rho I_n - A| = 0$ と仮定すると、 $\rho \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ である。一方、 λ の定義から $\rho > \lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ となるが、これは $\rho \in \sigma_p(A)$ に矛盾する。従って、 $|\rho I_n - A| \neq 0$ となる。

次に、 $|\rho I_n - A| < 0$ と仮定し、 ρ を固定する。定理3より、ある $\rho^* > \max\{0, \rho\}$ が存在し、任意の $\eta \geq \rho^*$ に対して、 $|\eta I_n - A| > 0$ である。このような η も固定する。

ここで、 A の固有多項式 $\varphi(\theta) = |\theta I_n - A|$ は θ に関する n 次の多項式関数となるから、 \mathbb{R} 上で連続である。仮定より $\varphi(\rho) < 0 < \varphi(\eta)$ であり、 $\varphi(\theta)$ は閉区間 $[\rho, \eta]$ 上で連続であるから、中間値の定理により、ある実数 $\rho < \theta^* < \eta$ が存在して、 $\varphi(\theta^*) = 0$ となる。すなわち、 $\theta^* \in \sigma_p(A)$ である。一方、仮定より $\theta^* > \rho > \lambda \geq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ であるから、 $\theta^* \in \sigma_p(A)$ に矛盾。従って、 $|\rho I_n - A| > 0$ であり、 $\rho I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たすことが示される。

逆に、 $\rho I_n - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすと仮定する。このとき、補題 1 より、 $\rho I_n - A$ から第 i 行、第 i 列を取り除いた $(\rho I_n - A)_i^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ は、任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、Hawkins-Simon の条件を満たす。また、任意の $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、

$$(\rho I_n - A)_i^- = \rho I_{n-1} - A_i^- \quad (1.2.8)$$

であるから、帰納法の仮定により各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $\rho > \lambda(A_i^-)$ が成り立つ。これより、

$$\rho > \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

が従う。

次に、 $\sigma_p(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ のとき、 $\rho > \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ であることを、背理法を用いて示す。まず $\rho = \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ と仮定すると、 $\rho \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ であるから、 $|\rho I_n - A| = 0$ となるが、これは Hawkins-Simon の条件 $|\rho I_n - A| > 0$ に矛盾。従って、 $\rho \neq \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ である。 $\rho < \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}$ と仮定すると、定理 3 より、任意の $\eta \geq \rho$ に対して $\eta I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たす、しかし、 $\eta = \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\} > \rho$ とすれば、 $|\eta I_n - A| = 0$ となり、これは Hawkins-Simon の条件を満たさないため矛盾。従って、 $\rho > \max\{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-), \max\{\sigma_p(A) \cap \mathbb{R}\}\}$ が成り立つ。 λ を (1.2.7) のように定義すれば $\rho > \lambda$ となるので、**Claim 2** が示された。なお、続く **Claim 1** の証明で λ が A の最大固有値 $\lambda(A)$ と一致することが示される。

Step 2-2 続いて、**Claim 1** を示そう。この場合は $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ であり、 $\lambda = \lambda(A)$ が成り立ち、固有ベクトルが符号を変えないことを示せばよい。

$\text{adj } A \in M_n(\mathbb{R})$ を、行列 A の余因子行列とする。 $\rho I_n - A$ の行列式を第 i 行における余因子展開を、全ての i について行えば、行列の積の定義から等式

$$(\rho I_n - A) \text{adj}(\rho I_n - A) = |(\rho I_n - A)| I_n \quad (1.2.9)$$

が成り立つ。 $\rho > \lambda$ のとき、 $\rho I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たすため、逆行列 $(\rho I_n - A)^{-1}$ が存在する。逆行列は等式 (1.2.9) より

$$(\rho I - A)^{-1} = \frac{1}{|\rho I_n - A|} \text{adj}(\rho I_n - A)$$

と表すことができる。定理 2 より $(\rho I - A)^{-1} \geq 0$ 、および $|\rho I_n - A| > 0$ であるから、 $\text{adj}(\rho I_n - A) \geq 0$ である。

ここで、 $\text{adj}(\rho I_n - A)$ の (i, j) 成分を $(\alpha_{ij}(\rho))$ と表すことにすれば、余因子行列の定義から

$$\alpha_{ij}(\rho) = (-1)^{i+j} \left| (\rho I_n - A) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix} \right|$$

であり、 $\alpha_{ij}(\rho)$ は ρ についての $n-1$ 次の多項式関数となる。従って、 ρ について \mathbb{R} 上連続関数であるから、

$$\lim_{\rho \rightarrow \lambda} \alpha_{ij}(\rho) = \alpha_{ij}(\lambda)$$

が成立する。一方、 $\rho > \lambda$ のとき $\alpha_{ij}(\rho) \geq 0$ であるから、

$$\lim_{\rho \rightarrow \lambda} \alpha_{ij}(\rho) \geq 0$$

となるため、 $\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$ である。従って、 $\text{adj}(\lambda I - A) \geq 0$ が成り立つ。

また、固有多項式 $\varphi(\rho) = |\rho I_n - A|$ も、 ρ に関する n 次の多項式関数となり、 \mathbb{R} 上で連続である。 $\rho > \lambda$ のとき、

条件 1 より $\varphi > 0$ であるから、

$$\lim_{\rho \rightarrow \lambda} \varphi(\rho) = \varphi(\lambda) \geq 0$$

が成り立つ。すなわち、 $|\lambda I_n - A| \geq 0$ である。

$|\lambda I_n - A| = 0$ となることを示そう。 $\mathbf{e} = {}^t(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ とする。すなわち、全ての成分が 1 のベクトルである。等式 (1.2.9) の両辺を左から掛けると、

$$(\lambda I_n - A) \operatorname{adj}(\lambda I_n - A) \mathbf{e} = |(\lambda I_n - A)| I_n \mathbf{e} = |(\lambda I_n - A)| \mathbf{e}$$

となる。ここで、 $\mathbf{x} = \operatorname{adj}(\lambda I_n - A) \mathbf{e}$ 、 $\mathbf{c} = |(\lambda I_n - A)| \mathbf{e}$ とおけば、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 、 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ であり、

$$(\lambda I_n - A) \mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{1.2.10}$$

を満たす。さらに、 $\operatorname{adj}(\lambda I_n - A) \geq 0$ 、 $|\lambda I_n - A| \geq 0$ であるから、 $\mathbf{x} \geq 0$ 、 $\mathbf{c} \geq 0$ となる。

ここで、 $|\lambda I_n - A| > 0$ と仮定すると、 $\mathbf{c} > 0$ 、 $\mathbf{x} \geq 0$ となり条件 2 を満たすため、 $\lambda I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たすが、これは先ほど示した **Claim 2** に矛盾する。従って、 $|\lambda I_n - A| = 0$ であるから、方程式 (1.2.10) は

$$(\lambda I_n - A) \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1.2.11}$$

となるので、 $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ である。

次に、 $\lambda = \lambda(A)$ となることを示そう。 $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$ であるから、 λ の定義 (1.2.7) より、

$$\lambda = \max \sigma_p(A) \cap \mathbb{R}$$

である。一方、再び (1.2.7) より、

$$\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

であるため、 $\lambda \geq 0$ となる。従って、 λ は $A \in M_n(\mathbb{R})$ の非負固有値のうち最大のものであるから、 $\lambda = \lambda(A)$ が成り立つ。

次に、 $\lambda = \lambda(A)$ に対する固有ベクトルが符号を変えないことを示す。

Case 1 $\mathbf{x} \neq 0$ のとき、 \mathbf{x} は方程式 (1.2.11) の解であるから、 \mathbf{x} は $\lambda \in \sigma_p(A)$ に対する固有ベクトルの一つとなる。

一方、 \mathbf{x} の成分 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を表すと、 $\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) であるから、

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$$

となるため、 $\mathbf{x} \geq 0$ が成り立つ。

Case 2 $\mathbf{x} = 0$ のとき、 \mathbf{x} は固有ベクトルではない。 $\alpha_{ij}(\lambda) \geq 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) であるから、

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(\lambda) = 0$$

より、 $\alpha_{ij}(\lambda) = 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) となる。これは、 $\operatorname{adj}(\lambda I_n - A)$ の全ての成分が 0 であることを意味する。

また、 $|\lambda I_n - A| = 0$ であるから、その階数 $\operatorname{rank}(\lambda I_n - A) \leq n - 1$ となる。すなわち、ある $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在して、第 k 行の各成分 $\lambda \delta_{kj} - a_{kj}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が、その他の行の成分を用いた 1 次結合で表せる。これは、行基本変形を行い第 k 行の各成分を 0 とすること、すなわちその他の行の成分の定数倍と、それらの和を用いて、第 k 行の各成分と同じ値をつくることと同等である。すなわち、 $p_k = 0$ を満たす n 個の係数

$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\lambda \delta_{kj} - a_{kj} = \sum_{i=1}^n p_i (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と表せる。

また、 $\text{adj}(\lambda I_n - A) = \mathbf{O}$ であるから、 $\lambda I_n - A$ の全ての余因子が 0、特に、 $(\lambda I_n - A)_i^-$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に対して、

$$|\lambda I_{n-1} - A_i^-| = 0$$

が成り立つ。すなわち、 $\lambda \in \sigma_p(A_i^-)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である。一方、帰納法の仮定により、 $A_i^- \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ は Frobenius 根 $\lambda(A_i^-)$ が存在して、 $\lambda \leq \lambda(A_i^-)$ が成立する。すなわち、

$$\lambda \leq \min_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$$

一方、 λ の定義 (1.2.7) より、 $\lambda \geq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda(A_i^-)$ でもあるので、

$$\lambda = \lambda(A_i^-) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

であることがわかる。

また、帰納法の仮定により Frobenius 根 $\lambda = \lambda(A_k^-)$ に対応する固有ベクトル $\mathbf{y}^* \in \mathbb{R}^{n-1}$ で、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ となるものが存在する。すなわち、

$$(\lambda I_{n-1} - A_k^-) \mathbf{y}^* = \mathbf{0} \tag{1.2.13}$$

である。ここで、 $\mathbf{y}^* = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n)$ と表せば、方程式 (1.2.13) の $n-1$ 個の行について、それぞれ形式的に $y_k = 0$ とおけば、等式

$$\sum_{j=1}^n (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n) \tag{1.2.14}$$

を得る。これらは左辺が 0 であるから、(1.2.12) で定めた係数 $\{p_i\}_{i=1}^n$ を、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して掛け算すると、

$$p_i \sum_{j=1}^n (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) y_j = \sum_{j=1}^n p_i (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

を得る。この \mathbf{y}^* の各成分 $\{y_i\}_{\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}}$ を用いて、

$$\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, 0, y_{k+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定義する。このとき、 \mathbf{y} は $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ である。

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ が $\lambda \in \sigma_p(A)$ の固有ベクトルであることを示そう。 $(\lambda I_n - A)\mathbf{y}$ を各行について展開し、全て 0 となることを示せばよい。 n 個の行のうち、 $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ については、 $y_k = 0$ となっていることに注意すれば、等式 (1.2.14) より、

$$\sum_{j=1}^n (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) y_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$$

が得られる。従って、残る $i = k$ 行については、等式 (1.2.12) より、

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (\lambda \delta_{kj} - a_{kj}) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n p_i (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) \right) y_j \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_i (\lambda \delta_{ij} - a_{ij}) y_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^n 0 = 0
\end{aligned}$$

以上より、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ は最大固有値 $\lambda = \lambda(A)$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) に対する $\mathbf{y} \geq 0$ の固有ベクトルである。

□

注意 3 定理 4 により、定理 2 の 4 つの条件と同値の条件がさらに一つ加わったことになる。すなわち、 $\rho I_n - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすことと、 $\rho > \lambda(A)$ が同値となる。

また、この章では $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し、非負行列という条件以外は何も付けていないことに注意しよう。 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が既約という性質を用いると、Perron-Frobenius の定理においてより強力な主張が成り立つ。このことは第 1.3 節において詳しく解説する。

定理 4 (Perron-Frobenius の定理) より、以下の系が導かれる。

系 1 Frobenius 根について、次の 4 つの主張が成り立つ。

Claim 1 非負値ベクトル $\mathbf{y} \geq 0$ ($\mathbf{y} \neq 0$) と、非負行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 、ある実数 ρ に対して、 $A\mathbf{y} \geq \rho\mathbf{y}$ ならば、 $\lambda(A) \geq \rho$ 。

Claim 2 A の任意の (一般には複素数の) 固有値を ω とすれば、 $\lambda(A) \geq |\omega|$ 。

Claim 3 $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$ が、 $A_1 \geq A_2 \geq 0$ を満たすならば、 $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$ 。

Claim 4 $\lambda(A) = \lambda({}^t A)$ 。

ここで、複素数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ ($\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$) に対して、 $|\omega| \in \mathbb{R}$ を $|\omega| := \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ と定める。つまり、複素数平面上での ω と原点の距離を $|\omega|$ と表す。これは、実数の絶対値の自然な拡張である。

Proof. **Claim 1** を示す。

仮定より、 $A\mathbf{y} \geq \rho I_n \mathbf{y}$ であるから、 $(\rho I_n - A)\mathbf{y} \leq 0$ である。もし $\rho > \lambda(A)$ であれば、定理 4 より、 $\rho I_n - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たす。従って、定理 2 より、逆行列 $(\rho I_n - A)^{-1}$ が存在して、 $(\rho I_n - A)^{-1} \geq 0$ である。従って、不等式 (1.2.15) の両辺に $(\rho I_n - A)^{-1}$ を掛ければ、

$$(\rho I_n - A)^{-1} (\rho I_n - A) \mathbf{y} \leq (\rho I_n - A)^{-1} \cdot 0 \iff \mathbf{y} \leq 0$$

となり、 $\mathbf{y} \leq 0$ となり、 $\mathbf{y} \geq 0$ ($\mathbf{y} \neq 0$) に矛盾する。

Claim 2 を示す。

仮定より、 $\omega \in \sigma_p(A)$ であるから、一般に $\omega \in \mathbb{C}$ であることに注意すると、

$$Az = \omega z$$

となる固有ベクトル $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ が存在する。 $\mathbf{z} = {}^t(z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($z_i \in \mathbb{C}$) とおくと、 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、

$$\omega z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$$

が成立する。従って、両辺の絶対値を取れば、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して、不等式

$$|\omega z_i| = |\omega| |z_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |z_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j|$$

を得る。ここで、 $\hat{z} = (|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|) \in \mathbb{R}^n$ とおくと、 $\hat{z} \geq 0$ ($\hat{z} \neq 0$) であり、 $\sum_{j=1}^n a_{ij} |z_j|$ は $A\hat{z}$ の第 i 行であるから、

$$A\hat{z} \geq |\omega| \hat{z}$$

となり、**Claim 1** より、 $\lambda(A) \geq |\omega|$ となる。

Claim 3 を示す。 $\lambda(A_2)$ に対する固有ベクトル $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ で $\mathbf{x}_2 \geq 0$ となるものを取る。このとき、 $A_1 \geq A_2 \geq 0$ であるから、この両辺に $\mathbf{x}_2 \geq 0$ を掛ければ、

$$A_1 \mathbf{x}_2 \geq A_2 \mathbf{x}_2$$

を得る。一方、 $\lambda(A_2) \in \sigma_p(A_2)$ であるから、 $A_2 \mathbf{x}_2 = \lambda(A_2) \mathbf{x}_2$ が成り立つので、

$$A_1 \mathbf{x}_2 \geq \lambda(A_2) \mathbf{x}_2$$

従って、**Claim 1** より、 $\lambda(A_1) \geq \lambda(A_2)$ となる。

Claim 4 を示す。

任意の n 次正方行列の行列式は、その転置行列の行列式と等しい。従って、

$$|\lambda I_n - A| = |{}^t(\lambda I_n - A)| = |\lambda I_n - {}^t A|$$

となるから、 A の固有方程式 $|\lambda I_n - A| = 0$ と ${}^t A$ の固有方程式 $|\lambda I_n - {}^t A| = 0$ は完全に一致する。従って、 $\sigma_p(A) = \sigma_p({}^t A)$ であるから、 $\lambda(A) = \lambda({}^t A)$ が満たされる。

1.3. 既約な行列と Perron-Frobenius の定理

1.3.1. 既約な行列の定義とその性質

この章では、行列に既約という性質を導入する。既約な非負行列 A に対しては、Perron-Frobenius の定理においてより強い主張が成り立つ。特に、Frobenius 根 $\lambda(A)$ に対応する任意の固有ベクトルが、ある正の固有ベクトル $\mathbf{x} > 0$ の定数倍となることは、特筆すべきであろう。この事実について証明を述べるが、まずは非負な n 次正方行列に対する可約な行列と、そうでない行列である既約な行列を定義しよう。

定義 3 $A \in M_n(\mathbb{R})$ を非負行列とし、添字集合を $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ とする。行列 A が可約である、もしくは分解可能であるとは、 Λ の部分集合 $K, L \subset \Lambda$ ($K, L \neq \emptyset$) で、 $K \cup L = \Lambda$ 、 $K \cap L = \emptyset$ を満たし、 $i \in K$ かつ $j \in L$ となる全ての組 (i, j) に対して

$$a_{ij} = 0$$

となるものが存在することをいう。可約でない行列を、**既約**である、もしくは分解不能であるという。

以降、ある集合 A の要素の個数を、 $n(A)$ で表すこととする。また、

補題 2 $A \in M_n(\mathbb{R})$ を非負行列とする。添字集合を $\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、 Λ の部分集合を K, L とし、 $n(L) = s$ とする。このとき、 A が可約となることと、行または列の順番を入れ替える正則行列（これを置換行列という） P が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

となることは同値である。ここで、 $A_{11} \in M_s(\mathbb{R})$ 、 $A_{22} \in M_{n-s}(\mathbb{R})$ 、 A_{12} は s 行、 $n - s$ 列の行列であり、これらは全て非負行列である。

Proof. A が可約であると仮定する。このとき、 Λ の部分集合 $K, L \subset \Lambda$ ($K, L \neq \emptyset$) で、 $K \cup L = \Lambda$ 、 $K \cap L = \emptyset$ を満たし、 $i \in K$ かつ $j \in L$ となる全ての組 (i, j) に対して $a_{ij} = 0$ となるものが存在する。ここで、 $L \subset \Lambda$ の要素を小さい数から順に i_1, i_2, \dots, i_s

とし、 $K \subset \Lambda$ の要素を小さい数から順に $i_1^*, i_2^*, \dots, i_{n-s}^*$ とする。すなわち、 $\{i_p\}_{p=1}^s, \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$ はそれぞれ

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq n, \quad 1 \leq i_1^* < i_2^* < \dots < i_{n-s}^* \leq n$$

を満たし、 $\{i_p\}_{p=1}^s, \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s}$ の合計 n 個の数を昇順に並べたら、 $1, 2, \dots, n$ となる。また、 K, L の定義から、 $\{i_p\}_{p=1}^s \cup \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \{1, 2, \dots, n\}$ 、 $\{i_p\}_{p=1}^s \cap \{i_p^*\}_{p=1}^{n-s} = \emptyset$ であり、可約の条件から

$$\begin{pmatrix} a_{i_1^* i_1} & \dots & a_{i_1^* i_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{n-s}^* i_1} & \dots & a_{i_{n-s}^* i_s} \end{pmatrix} = O$$

である。ここで、列基本変形（右基本変形）の定義により、行列 A の列の順列を $(1, 2, \dots, n)$ から $(i_1, i_2, \dots, i_s, i_1^*, i_2^*, \dots, i_{n-s}^*)$ に並べ替える置換行列 P が存在し、入れ替えた行列は AP で表される。さらに、行列 A の行の順列を $(1, 2, \dots, n)$ から同じく $(i_1, i_2, \dots, i_s, i_1^*, i_2^*, \dots, i_{n-s}^*)$ に入れ替える置換行列は同じ P であり、入れ替えた行列は PA である。さらに、この置換行列 P は n 次単位行列の第 i 列と第 j 列を入れ替えた基本行列 P_{ij} のいくつかの積で表され、 $P_{ij}^{-1} = P_{ji} = P_{ij}$ である。従って、 $P = P^{-1}$ であるから、これらを組み合わせると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \dots & a_{i_1 i_s} & a_{i_1 i_1^*} & \dots & a_{i_1 i_{n-s}^*} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \dots & a_{i_2 i_s} & a_{i_2 i_1^*} & \dots & a_{i_2 i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_s i_1} & a_{i_s i_2} & \dots & a_{i_s i_s} & a_{i_s i_1^*} & \dots & a_{i_s i_{n-s}^*} \\ a_{i_1^* i_1} & a_{i_1^* i_2} & \dots & a_{i_1^* i_s} & a_{i_1^* i_1^*} & \dots & a_{i_1^* i_{n-s}^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_{n-s}^* i_1} & a_{i_{n-s}^* i_2} & \dots & a_{i_{n-s}^* i_s} & a_{i_{n-s}^* i_1^*} & \dots & a_{i_{n-s}^* i_{n-s}^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

となる。なお、ここまでの操作は行と列の入れ替えを行っているのみであるから、 $A_{11} \geq 0$ 、 $A_{12} \geq 0$ 、 $A_{22} \geq 0$ である。

逆に、非負行列 A に対して、ある置換行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

を満たすと仮定する。このとき、 $A_{11} \in M_k(\mathbb{R})$ 、 $A_{22} \in M_l(\mathbb{R})$ とすれば、両辺に左から P 、右から P^{-1} を掛ければ、

$$A = P \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる。これらは並べ替えただけであり、行列の成分は変化していないため、 A は可約であるための条件を満たしている。

□

ここで、ベクトル \mathbf{x} の全ての成分 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) が正ではない、すなわち (1 つとは限らない) ある j が存在して、 $x_j \leq 0$ となるとき、 $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}$ と表すこととする。

次の重要な補題を証明する。

補題 3 非負行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が可約であることと、ある実数 $\rho \in \mathbb{R}$ と、ある非負ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ で $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を満たすものが存在して、 $A\mathbf{x} \leq \rho\mathbf{x}$ となることは同値である。

Proof. まず、非負行列 $A \in M$ が可約であれば、補題 2 より、 A の行と列を入れ替えるある置換行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix}$$

を満たす。 $A_{11} \in M_k(\mathbb{R})$ 、 $A_{22} \in M_l(\mathbb{R})$ であるとする。 $A_{11} \geq 0$ であるから、 A_{11} に対する Frobenius 根 $\lambda(A_{11})$ が存在し、対応する固有ベクトル $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^s$ で $\mathbf{y}_1 \geq 0$ を満たすものが存在する。すなわち、

$$A_{11}\mathbf{y}_1 = \lambda(A_{11})\mathbf{y}_1.$$

ここで、 $\mathbf{y}_1 = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_s)$ と書くとき、 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ を

$$\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_s, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-s \text{ 個}})$$

とおく。このとき、

$$P^{-1}AP\mathbf{y} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(A_{11})\mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \lambda(A_{11}) \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \lambda(A_{11})\mathbf{y}$$

ゆえに、置換行列 P を左側から掛ければ、

$$AP\mathbf{y} = \lambda(A_{11})P\mathbf{y}$$

となる。 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ とおけば、

$$A\mathbf{x} = \lambda(A_{11})\mathbf{x}$$

である。すなわち、 $\rho \geq \lambda(A_{11})$ とおけば、 $A\mathbf{x} \leq \rho\mathbf{x}$ である。さらに \mathbf{x} は \mathbf{y} の成分の順番を入れ替えたものであるから、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ であり、 $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を満たすベクトルとなる。

逆に、ある実数 $\rho \in \mathbb{R}$ と、ある非負ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ で、 $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ を満たすものが、 $A\mathbf{x} \leq \rho\mathbf{x}$ と

なると仮定する。 $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と表すことにする。 $L := \{j \in \mathbb{N} : x_j > 0\}$ とおくと、 $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ であるから、 $L \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ である。一方、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ より、 $L \neq \emptyset$ である。

ここで、 $K := \{j \in \mathbb{N} : x_j = 0\}$ とすると、 $K \cup L = \{1, 2, \dots, n\}$ かつ $K \cap L = \emptyset$ となる。不等式 $A\mathbf{x} \leq \rho\mathbf{x}$ を展開して行ごとに記述すれば、第 i 行は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq \rho x_i$$

となる。ここで、 $i \notin L$ すなわち、定義より $i \in K$ のとき、 $x_i = 0$ であるから、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq 0$$

となるが、 $A \geq \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ であるから、全ての項において $a_{ij}x_j = 0$ 。さらに、 $j \in L$ のときは、 $x_j > 0$ であるから、 $a_{ij} = 0$ ($i \in K, j \in L$)でなければならない。 K 、 L の条件より、これは $A = (a_{ij})$ が可約であることの定義に他ならない。

□

ここまでで、既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理がより強い結果を導くことが証明できるための道具が準備できた。

1.3.2. 既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理

定理 5 (既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理) 非負行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が既約な行列であるとする。このとき、Frobenius 根は $\lambda(A) > 0$ となり、 $\lambda(A)$ に対応する正の固有ベクトル $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ が存在する。しかも、任意の固有ベクトルはこの \mathbf{x} の定数倍になる。

注意 4 ここでの定数倍とは、注意 1 でも述べたように複素数倍を含めたものである。つまり、 $\lambda(A)$ に対応する任意の固有ベクトルは、全て $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ の複素数倍 $\mu\mathbf{x}$ ($\mu \in \mathbb{C}$)の形で記述される。このような固有値 $\lambda(A)$ を単純固有値とよぶ。このことは、 μ の虚部が0である、つまり $\mu \in \mathbb{R}$ のとき、固有ベクトルの成分は全て実数となり、 μ の虚部が0でない、つまり μ が虚数のときは、全て虚部が0でない複素数となることを表している。すなわち、任意の固有ベクトル $\mu\mathbf{x}$ の成分においては実数と虚数が混ざらないことを意味している。

Proof. 定理 4 より、 $\lambda(A)$ に対応する任意の非負の固有ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \mathbf{0}$ を取ると、 $A\mathbf{x} = \lambda(A)\mathbf{x}$ を満たす。この時、補題 3 より、 $\mathbf{x} \succ \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ であると仮定すると、 A は可約な行列となるが、これは A が既約な行列であることに矛盾する。従って、 $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ である。次に、 $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ を、 $\lambda(A)$ に対応する任意の固有ベクトルとする。 \mathbf{y} の各成分 $y_j \in \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, \dots, n$)を、実部 $s_j \in \mathbb{R}$ 、虚部 $t_j \in \mathbb{R}$ に分けて、

$$y_j = s_j + t_j i$$

と表すことにする。ここで、 i は虚数単位を表す。この実部、虚部をまとめたベクトルをそれぞれ $\mathbf{s} = {}^t(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ 、 $\mathbf{t} = {}^t(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ と表すことにする。このとき $\mathbf{y} = \mathbf{s} + i\mathbf{t}$ と表すことができ、 \mathbf{y} が $\lambda(A)$ に対する固有ベクトルであるから、

$$A(\mathbf{s} + i\mathbf{t}) = \lambda(A)(\mathbf{s} + i\mathbf{t}),$$

すなわち、

$$(\lambda(A)I_n - A)\mathbf{s} + (\lambda(A)I_n - A)t\mathbf{i} = 0$$

となるので、実部と虚部がそれぞれ固有方程式 (1.2.4) を満たす。従って、 \mathbf{y} の実部 \mathbf{s} 、 \mathbf{y} の虚部 \mathbf{t} もまた $\lambda(A)$ に対応する固有ベクトルである。

はじめに、 \mathbf{y} の実部 \mathbf{s} が $\mathbf{x} > 0$ の定数倍で表されることを示そう。定数 $\mu_1 \in \mathbb{R}$ を

$$\mu_1 = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{s_j}{x_j}$$

とおく。このとき、 $\mu_1 \leq s_j/x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が成立するので、 $s_j - \mu_1 x_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$) が成立し、 $s_{j^*} - \mu_1 x_{j^*} = 0$ を満たす $j^* \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在する。故に、 $\mathbf{z}_1 = \mathbf{s} - \mu_1 \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ とおくと、 $\mathbf{z}_1 \geq 0$ 、 $\mathbf{z}_1 \neq 0$ を満たす。さらに \mathbf{z}_1 は、

$$A\mathbf{z}_1 = A(\mathbf{s} - \mu_1 \mathbf{x}) = A\mathbf{s} - \mu_1(A\mathbf{x}) = \lambda(A)\mathbf{s} - \mu_1\lambda(A)\mathbf{x} = \lambda(A)(\mathbf{s} - \mu_1 \mathbf{x}) = \lambda(A)\mathbf{z}_1$$

を満たす。従って、 $\mathbf{z}_1 \neq 0$ と仮定すると、再び補題 3 より、 A が可約な行列となるが、これは矛盾である。よって、 $\mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ であるから、任意の固有ベクトル \mathbf{y} の実部 \mathbf{s} は、 $\mathbf{s} = \mu_1 \mathbf{x}$ と表される。

全く同様に、 \mathbf{y} の虚部 \mathbf{t} が $\mathbf{x} > 0$ の定数倍で表されることが示される。すなわち、任意の固有ベクトル \mathbf{y} の虚部 \mathbf{t} は、 μ_1 と同様に定める定数

$$\mu_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{t_j}{x_j}$$

を用いて、 $\mathbf{t} = \mu_2 \mathbf{x}$ と表される。故に、 $\mu = \mu_1 + \mu_2 i$ とおくと、

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + t\mathbf{i} = \mu_1 \mathbf{x} + \mu_2 \mathbf{x} i = (\mu_1 + \mu_2 i) \mathbf{x} = \mu \mathbf{x}$$

となるので、任意の固有ベクトル \mathbf{y} は、 $\mathbf{x} > 0$ の複素数を含む定数倍 $\mu \mathbf{x}$ で表せる。

□

なお、定理 4 より導かれた系 1 は A が非負行列であればよく、既約であるかどうかは関係がない。 A が既約な行列であれば、定理 5 より、さらに次のことが導かれる。

系 2 **Claim 1** $A \in M_n(\mathbb{R})$ が非負で既約な行列であるとする。ある $\mathbf{x} \geq 0$ に対して、 $(\rho I - A)\mathbf{x} \geq 0$ ならば、 $\rho I - A$ は Hawkins-Simon の条件を満たす。

Claim 2 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が非負で既約な行列であるとする。 $\rho I - A$ が Hawkins-Simon の条件を満たすならば、 $(\rho I - A)^{-1} > 0$ となる。

Proof. **Claim 1** を示す。

${}^t A$ についての固有値問題 (1.2.3) を考える。

$${}^t A \mathbf{p} = \lambda({}^t A) \mathbf{p}$$

仮定より A が既約であるから、その並び替えの ${}^t A$ もまた既約である。したがって、定理 5 より、Frobenius 根 $\lambda({}^t A)$ に対応する正の固有ベクトル $\mathbf{p} > 0$ が存在する。この固有値問題の両辺の転置をとると、

$${}^t \mathbf{p}^t ({}^t A) = {}^t \mathbf{p}^t \lambda({}^t A)$$

となる。ここで、 ${}^t({}^tA) = A$ であり、 $\lambda({}^tA)$ は実数なので、 ${}^t\lambda({}^tA) = \lambda({}^tA)$ である。さらに、系1より $\lambda({}^tA) = \lambda(A)$ であるから、

$${}^t pA = \lambda(A){}^t p$$

が成立する。ここで仮定より、 $\rho x \geq Ax$ であるから、この不等式の両辺に左から ${}^t p x > 0$ を掛けると、

$$\rho {}^t p x > {}^t p Ax = \lambda(A){}^t p x$$

従って、

$$(\rho - \lambda(A)){}^t p x > 0$$

となる。ところで、 $x \neq 0$ であるから、 $x \geq 0$ 、よって、 ${}^t p x > 0$ となる。従って、 $\rho - \lambda(A) > 0$ となり、定理4より、 $\rho I - A$ はHawkins-Simonの条件を満たす。

Claim 2を示す。

はじめに、任意の $c \geq 0$ に対して、 $(\rho I - A)^{-1}c = x$ とおけば、 $x > 0$ となることを示す。 $\rho I - A$ がHawkins-Simonの条件を満たすので、定理2より、任意の $c \geq 0$ に対して、 $(\rho I - A)x = c$ を満たす非負値解 $x \geq 0$ が存在する。このとき、

$$\rho x = Ax + c \geq Ax$$

であるから、補題3より、 $x \not\geq 0$ と仮定すると、 A が可約な行列となるので矛盾する。従って、 $x > 0$ である。

次に、 $(\rho I - A)^{-1}c = x$ であることを示す。 $c \in \mathbb{R}^n$ は非負値であれば任意に取れるので、任意の

$j = 1, 2, \dots, n$ に対し、 $c = e_j = {}^t(0, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ とおけば、対応する解を x_{e_j} とすると、

$$(\rho I - A)^{-1}e_j = x_{e_j}$$

となる。すると、 $(\rho I - A)^{-1} = (\beta_{ij})$ と書くことにすれば、

$$(\rho I - A)^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} e_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}$$

となるから、左辺の $x_{e_j} = {}^t(x_{e_j,1}, \dots, x_{e_j,n})$ と各成分を比較すれば、

$$x_{e_j,i} = \beta_{ij}$$

である。ここで、 $x_{e_j,i} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)であるから、 $\beta_{ij} > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)となる。従って、全ての $j = 1, 2, \dots, n$ に対して同様の操作を行うことで、 $\beta_{ij} > 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$)を得る。

□

2 経済学的意味

2.1. Hawkins-Simon の条件

2.1.1. 一次方程式系

式(1.1.1)は、マルクス経済学において、対象化された労働量を求める式になっている。

産出を単位行列 I 、投入を非負の正方行列 $A = (a_{ij})$ として、 $B = I - A$ とおく。すると $Bx = c$ は

$(I - A)x = c$ であり、これを变形すると $x = Ax + c$ となる。ここで、 x を未知数とすれば、 c が各生産過程の産出1単位あたりの労働時間を示し、 x が各生産物の対象化された労働量を示すベクトルとなっていることが分かる。

従って、 B の非対角成分の非正条件(1.1.2)は、投入が非負であることの結果と解釈できる。対角成分に非正条件が付されないのは、 B の対角成分は、産出からそれと同種の投入を引いた量であり、正である可能性があるからである(むしろ生産的な体系では、正でなければならない)。

マルクス経済学では、対象化された労働量の計算では投入行列に生活物資を含めないが、生産価格の計算では生活物資を含めた拡大投入行列を扱う。その技術のもとで生産物1単位の生産に必要な労働量を $l = {}^t(l_1, l_2, \dots, l_n) (\geq 0)$ 、労働1時間あたりの生活物資を $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) (\geq 0)$ とおくと、拡大投入行列 A^+ は次のように書ける。

$$A^+ = A + ld$$

生活物資は非負なので、拡大投入行列の各成分は、もとの投入行列の各成分よりも大きくなるが、 B の非対角成分の非正条件(1.1.2)に反することはない。従って、第1.1節での数学的議論は、投入行列だけでなく、拡大投入行列を扱う理論分野にもそのまま適用することができる。

2.1.2. Hawkins-Simon の条件

この条件は、経済学では純生産可能条件と呼ばれる。このことを2部門のモデルで示そう。2部門の投入行列は、産出を単位行列として、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

となる。行は部門(生産物の種類)を表す。ここで、第2部門は産出の規模を自由に変更でき、産出規模に応じて投入は比例的に変化するものとする。第2部門の産出規模を $s (> 0)$ とすると、第1財の純生産量は $1 - (a_{11} + sa_{21})$ 、第2財の純生産量は $s - (a_{12} + sa_{22})$ となる。²

純生産が可能であるということは、第1財、第2財ともに純生産量が正であるということである。 $1 - (a_{11} + sa_{21}) > 0$ より、 $1 - a_{11} > sa_{21}$ 。 $s > 0, a_{21} \geq 0$ より、 $1 - a_{11} > 0$ 。これは B の1次首座小行列式が正であることに相当する。

続いて $s - (a_{12} + sa_{22}) > 0$ より、 $s(1 - a_{22}) > a_{12}$ 。以下 a_{12} が非負であることに注意して場合分けをする。

・ $a_{12} = 0$ の場合。

$s(1 - a_{22}) > 0$ 。 $s > 0$ より $1 - a_{22} > 0$ 。 $1 - a_{22} > 0$ なので、 $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ となる。これは B の2次首座小行列式が正であることに相当する。

² 投入行列の転置を取ってから計算すると、第1章の計算と一致する。

・ $a_{12} > 0$ の場合。

$s(1 - a_{22}) > a_{12}, 1 - a_{11} > sa_{21}$ より、

$$\frac{a_{21}}{1 - a_{11}} < \frac{1}{s} < \frac{1 - a_{22}}{a_{12}}$$

従って

$$\frac{a_{21}}{1 - a_{11}} < \frac{1 - a_{22}}{a_{12}}$$

であり、これを整理すると $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ 。これは B の 2 次首座小行列式が正であることに相当する。

つまり、 B が Hawkins-Simon の条件を満たすということは、それに相当する技術体系のもとでは、部門間の産出規模の比率を適当に調整すれば、純生産が可能であることが意味されている。

2.1.3. Hawkins-Simon の条件と非負値解

式 (1.1.1) は、対象化された労働量を求める式と解釈することができるから、Hawkins-Simon の条件が条件 3 (方程式 (1.1.1) は、任意の非斉次項 $c \geq 0$ に対して、非負値解 $x \geq 0$ を持つ) と同値であるということは、Hawkins-Simon の条件が満たされるとき、対象化された労働量はマイナスにはならないということを含意する。従って (条件 1 \Rightarrow 条件 3) が経済学的には最も重要な意義をもつ。

2.1.4. Hawkins-Simon の条件と逆行列の非負値性

(条件 1 \Rightarrow 条件 4) = (Hawkins-Simon の条件 \Rightarrow 方程式 (1.1.1) の係数行列 $B = (b_{ij})$ は、全ての成分が非負である逆行列 B^{-1} を持つ) は、「マルクスの基本定理」の証明に用いられる。

「マルクスの基本定理」は、労働者に対する搾取と利潤の発生が同値であるという定理である。経済学的な含意としては、搾取 \Rightarrow 利潤より、利潤 \Rightarrow 搾取の証明の方が重要度が高い。搾取は、労働による剰余の発生と同義であるから、その場合に剰余の価格表現であるところの利潤が発生することはむしろ当然である。しかし逆に、利潤が生まれている場合には必ず、それが自然の恵みや機械の効率性の恩恵に還元されることはなく、労働にその根源があるという方は、ある種の直観に反するからである。

この後者の、利潤 \Rightarrow 搾取の証明の際に、Hawkins-Simon の条件を満たす行列は非負逆行列をもつということが必要になる。この部分さえクリアされれば、「マルクスの基本定理」の証明は非常にシンプルである。

行列を用いた「マルクスの基本定理」の証明はどこにでも載っているのですが、ここでは、逆行列の非負値性を本質的には用いながら、明示的には行列を使わずに証明する方法を 2 部門モデルで示す。

・ 2 部門での「マルクスの基本定理」の証明

対象化された労働量を求める式は、次のように書ける。

$$\begin{cases} t_1 = a_{11}t_1 + a_{12}t_2 + l_1 & (2.1.1) \\ t_2 = a_{21}t_1 + a_{22}t_2 + l_2 & (2.1.2) \end{cases}$$

ただし、 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ は先の投入行列の成分と同じもので、従って非負であり、また純生産可能条件、つまり $1 - a_{11} > 0$ かつ $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ を満たしているものとする。なお、 $t_i(i = 1, 2)$ は対象化された労働量を表す。

さらに、 $w(> 0)$ を労働1時間当たりの賃金率、 $p_i(i = 1, 2)$ を価格として、「マルクスの基本定理」は次のように書ける。なおここでは生活物資 $d_i(i = 1, 2)$ は正とする。

マルクスの基本定理：2部門 ver.

$$1 > d_1t_1 + d_2t_2 \quad (2.1.3)$$

これは次の不等式と同値である。

$$\begin{cases} p_1 > a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1w & (2.1.4) \\ p_2 > a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2w & (2.1.5) \end{cases}$$

ただし

$$d_1p_1 + d_2p_2 = w \quad (2.1.6)$$

式(2.1.3)は、労働1時間に対して、労働1時間で得られる生活物資に対象化された労働時間が満たないことを意味する。ここではそれを搾取と呼ぶ。

式(2.1.4, 2.1.5)については、それぞれの不等式の右辺が原価、左辺が売値を表す。売値が原価より高いということは、利潤が出るということを意味することになる。

十分条件（搾取がなされている（式(2.1.3)）ならば利潤が存在する（式(2.1.4, 2.1.5)））の証明

式(2.1.3)を仮定する。このとき、 $p_1, p_2 > 0$ で、式(2.1.4, 2.1.5)を満たす p_1, p_2 を見つければよい。式(2.1.1, 2.1.2)は純生産可能条件を満たすので、 $t_1, t_2 > 0$ となる式(2.1.1, 2.1.2)の解 t_1, t_2 が存在する。これを用いて、 $t_1 = p_1, t_2 = p_2$ とおけば、式(2.1.1), (2.1.2)に代入すると

$$\begin{cases} p_1 = a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1 \\ p_2 = a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2 \end{cases}$$

が得られる。式(2.1.3)および式(2.1.6)より、 $w < 1$ 。従って

$$\begin{cases} p_1 > a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + l_1w \\ p_2 > a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + l_2w. \end{cases}$$

必要条件（利潤が存在する（式(2.1.4, 2.1.5)）ならば搾取がなされている（式(2.1.3)））の証明

式(2.1.1, 2.1.2)の両辺に w をかけたものをそれぞれ式(2.1.4, 2.1.5)に代入し、 $l_iw(i = 1, 2)$ を消去して整理すると、

$$\begin{cases} (1 - a_{11})(p_1 - t_1w) > a_{12}(p_2 - t_2w) & (2.1.7) \\ a_{21}(p_1 - t_1w) < (1 - a_{22})(p_2 - t_2w) & (2.1.8) \end{cases}$$

となる。

$p_1 - t_1w$ と $p_2 - t_2w$ とが両方とも正であることを背理法で示す。

・ $p_2 - t_2w = 0$ と仮定

式 (2.1.7) より $(1 - a_{11})(p_1 - t_1w) > 0$ 。純生産可能条件より $1 - a_{11} > 0$ 。従って $p_1 - t_1w > 0$ 。

式 (2.1.8) は、 $a_{21}(p_1 - t_1w) < 0$ となる。 $p_1 - t_1w > 0$ のため、 $a_{21} < 0$ であるが、これは a_{ij} が非負であることと矛盾。

従って $p_2 - t_2w \neq 0$ 。

・ $p_2 - t_2w < 0$ と仮定

式 (2.1.7, 2.1.8) は、

$$\begin{cases} \frac{p_1 - t_1w}{p_2 - t_2w} < \frac{a_{12}}{1 - a_{11}} \\ \frac{p_1 - t_1w}{p_2 - t_2w} > \frac{1 - a_{22}}{a_{21}} \end{cases}$$

となり、従って

$$\frac{1 - a_{22}}{a_{21}} < \frac{a_{12}}{1 - a_{11}}.$$

ところで、純生産可能条件より $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ 。これを变形すると

$$\frac{1 - a_{22}}{a_{21}} > \frac{a_{12}}{1 - a_{11}}$$

となり矛盾。

従って、 $p_2 - t_2w \neq 0$ と合わせて、 $p_2 - t_2w > 0$ 。

・ $p_1 - t_1w = 0$ と仮定

式 (2.1.7) は $0 > a_{12}(p_2 - t_2w)$ となる。上までで $p_2 - t_2w > 0$ なので、 $a_{12} < 0$ だが、 a_{ij} が非負であることと矛盾。

従って $p_1 - t_1w \neq 0$ 。

・ $p_1 - t_1w < 0$ と仮定

純生産可能条件より $1 - a_{11} > 0$ なので、 $(1 - a_{11})(p_1 - t_1w) < 0$ 。他方、 a_{ij} は非負であり、 $p_2 - t_2w > 0$ なので、 $a_{12}(p_2 - t_2w) \geq 0$ 。しかしこれは式 (2.1.7) に矛盾。

従って、 $p_1 - t_1w \neq 0$ と合わせて、 $p_1 - t_1w > 0$ 。

ここまでの背理法で $p_1 - t_1w > 0, p_2 - t_2w > 0$ が示された。続いて、 d_1, d_2 はいずれも正なので、

$$d_1(p_1 - t_1w) > -d_2(p_2 - t_2w)$$

となる。これを变形すると

$$d_1 p_1 + d_2 p_2 > d_1 t_1 w + d_2 t_2 w.$$

定義より $w = d_1 p_1 + d_2 p_2$ のため、これを用いて

$$1 > d_1 t_1 + d_2 t_2.$$

□

$p_i - t_i w$ は、 w で割ると $p_i/w - t_i$ となる。これは支配労働量と投下労働量の差である。従って、上の証明では、支配労働量が投下労働量を上回ることは、搾取の発生・利潤の発生と同値であることも同時に証明されている。

「マルクスの基本定理」において $(I - A)^{-1}$ が非負であるということは、経済学的には支配労働量 > 投下労働量であることを保証するものである。

2.2. Perron-Frobenius の定理

2.2.1. Frobenius 根

上でみたように、産出を単位行列 I 、投入を非負の正方行列 $A = (a_{ij})$ として、 $B = I - A$ とおいたとき、方程式 (1.1.1) は、対象化された労働量を社会的再生産のモデルのうちに求める式になっている。このことが理解されれば、方程式 (1.2.1) の ρ は、すべての部門の産出を等倍にするということが分かる。

さらに、Hawkins-Simon の条件が純生産可能条件だとすると、定理 3 は、特定の正の値の ρ^* より産出が大きくなれば、純生産可能条件が満たされるということを含意している。問題は、そのような ρ^* が存在するかどうかであるが、これが Perron-Frobenius の定理の中で、非負固有値のうち最大のものとして与えられることになる。

定理 3 は、Perron-Frobenius の定理の証明の中で、クリティカルな部分で用いられている。定理 3 の経済学的意味を以上のように確認しておく、証明プロセスをたどりやすくなる。

2.2.2. 固有値問題

産出を単位行列 I 、投入を非負の正方行列 $A = (a_{ij})$ 、一般的利潤率を r とする。式 (1.2.3) において、 $\lambda = 1/(1+r)$ とすると、

$$Ax(1+r) = Ix$$

となる。 A を拡大投入行列と解釈すると、これは x を価格ベクトルとして、一般的利潤率を与える生産価格を求める式になっている。つまり、式 (1.2.3) において、 A の固有値は一般的利潤率、固有ベクトルは価格を与える。

前節で述べられているように、固有方程式は λ についての n 次の方程式であるから、重解を許せば解が n 個あり、複素数も解に含まれる。これでは、一般的利潤率や価格を決定する式として、式 (1.2.3) を用いることはできない。この問題を解決し、式 (1.2.3) を価格の決定に用いることを可能にするのが、Perron-Frobenius の定理である。

2.2.3. Perron-Frobenius の定理

定理 4 の Claim 2 の経済学的意味から説明する。Claim 2 における ρ は、産出の規模を表す。 $\rho = 1$ とすれば、全部門で産出が 1 単位あたりに揃えられたことになる。これに伴い、投入行列 A の成分も、産出 1 単位あたりの

値となる。

このとき $1 > \lambda(A)$ であり、上で見たように A の固有値は利潤率 $1/(1+r)$ に相当するから、これは $r > 0$ を意味する。つまり Claim 2 は、全部門で産出が 1 単位あたりに揃えられている社会的再生産の体系に、Perron-Frobenius の定理を適用すると、正の一般的利潤率の存在が保証されるということの意味している。

しかしこの定理 4 では、非負固有値のうち最大のものを一般的利潤率を与える固有値としてとってきても、それに対応する固有ベクトルが価格を一意に定めるものとは言えない。というのも、定理 4 の Claim 1 では、最大固有値 $\lambda(A)$ に対応する固有ベクトルとして、実数かつ非負の成分をもつものが存在するとしか述べられておらず、これが唯一の価格ベクトルを与えるかどうかは保証されていないからである。

しかも、Claim 1 に示される固有ベクトルは非負であることしか言われていないので、0 の成分が含まれる。これでは価格が 0 の生産物がありうることになってしまう。

従って、定理 4 では、式 (1.2.3) が価格を決定する式として使えることはまだ保証されない。一般的利潤率が正になる可能性が言われているだけである。

Perron-Frobenius の定理を、価格の一意性を保証するものとして使うためには、さらに追加の条件が必要である。その条件が、投入行列 A が既約であるということである。

2.3. 既約な行列と Perron-Frobenius の定理

投入行列 A が既約であるということは、経済学的には投入行列に奢侈品が含まれないことを意味する。

ここでいう奢侈品は、すべての生産物にとって直接的または間接的に生産手段になる生産物以外の生産物のことである。投入行列 A が可約であるとは、置換行列 P が存在し、次のように書けることを意味するのであった。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

このとき、 A_{22} が投入となる生産物は、 A_{22} として自身の生産手段になっているだけでなく、 A_{12} として別種生産物の生産手段にもなっており、直接間接にすべての生産物の生産手段になっている。それに対して、 A_{11} と A_{12} で生産される生産物は、 A_{22} のみで生産される生産物の生産手段にはならない。従って、 A_{11} と A_{12} で生産される生産物は奢侈品に分類される。

奢侈品が存在する場合でも、その奢侈品が過度に自己再生産的（この意味はすぐ説明する）でなければ、特に経済学的には問題にならない。非奢侈品の投入産出関係が既約の投入行列となるので、そこに定理 5（既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理）が適用されて、価格と一般的利潤率が一意に決定される。その後、一般的利潤率が奢侈品の利潤率にも適用され、それにしたがって奢侈品の価格が決定される。³

しかし奢侈品の生産過程が、自らの産出を割合として多く投入に必要なとするような、自己再生産的な過程であるとき、上のような手順をたどることに問題が生じる。2 次の数値例で確認しよう。産出を単位行列として、投入行

³ 小幡 (2009) p.194。

⁴ Sraffa(1960) 付録 B。

列を

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix}$$

とおく。この場合固有値は0.6, 0.8であり、対応する固有ベクトルはそれぞれ $s_1(-1, 2)$, $s_2(1, 0)$ (s_i は実数) となる。Perron-Frobenius の定理どおり、最大固有値に対応する固有ベクトルは非負になっているが、どちらの固有ベクトルも価格ベクトルとしては適当でない。

Perron-Frobenius の定理を適用するなら、一般的利潤率としては最大固有値をとるべきだが、それは上で見た手順に合致しない。上の手順にしたがうと、非奢侈品である第2財が体系全体の利潤率を規定し、一般的利潤率は $2/3$ (固有値 0.6 に相当) になる。しかし、奢侈品である第1財が、1単位の産出に投入として自分自身を 0.8 単位必要とするため、価格が非負である限り、 $1/4$ (固有値 0.8 に相当) 以上の利潤率は実現できない。

それでも一般的利潤率を $2/3$ にしようとするならば、負の価格を許容する必要がある。この数値例の第1財は、スラッフアの「豆」のケースに相当する⁴。

他方、最大固有値にしたがって一般的利潤率を定めると $1/4$ となるが、このときは第2財の価格が0になる。それでは第2財は生産されないだろう。

この問題は、奢侈品の自己再生産度が高く、価格が非負の範囲で達成できる最大の利潤率が、非奢侈品が規定する利潤率よりも低いために発生する。これが先に「過度に自己再生産的」といった意味である。どちらの方が高くなるかは一般的には言えないため、この問題を回避するために、奢侈品を排除した既約の行列を考えることになるわけである。

既約な行列に対する Perron-Frobenius の定理である定理5は、定理4の Claim 1 が書き換わったものである。これにより、最大固有値に対応する正の固有ベクトルが存在し、かつ任意の固有ベクトルはその定数倍になるとされる。価格ベクトルとしては、異なる2つの成分の比率だけが重要なので、任意の固有ベクトルが特定のベクトルの定数倍になるということは、価格ベクトルとしては唯一に定まったと言ってよい。

こうして、式(1.2.3)が、価格を決定する方程式として用いることが、Perron-Frobenius の定理によって支えられている。以上のように非常に重要な定理なので、これに関しても、マルクス経済学でよく用いられる2部門モデルで、行列を用いない証明を以下で与えておく。

・2部門での Perron-Frobenius の定理の証明

生産価格、すなわち p_1 と p_2 の比を求める式は、次のように書ける。

$$\begin{cases} p_1 = (a_{11}p_1 + a_{12}p_2)(1+r) & (2.3.1) \\ p_2 = (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)(1+r) & (2.3.2) \end{cases}$$

ただし a_{ij} ($i, j = 1, 2$) は、生活物資を加えた拡大投入行列の係数となっているものとし、非負であり、純生産可能条件 $1 - a_{11} > 0$ かつ $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ を満たしているものとする。

Perron-Frobenius の定理：2部門 ver.

⁴ Sraffa(1960) 付録 B。

Claim 1 式 (2.3.1, 2.3.2) は、 $1/(1+r) = \lambda$ として、 p_1, p_2 の比と λ について 2 つの組み合わせを解として与えるが、奢侈品がない場合、 λ の解のうち大きい方は非負であり、それに対応する p_1, p_2 の比は正。

Claim 2 $\lambda < 1$ 。

式 (2.3.1, 2.3.2) は、 $1/(1+r) = \lambda$ として、

$$\begin{cases} (\lambda - a_{11})p_1 - a_{12}p_2 = 0 \\ -a_{21}p_1 + (\lambda - a_{22})p_2 = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

$$(2.3.4)$$

と表せる。これが $p_1 = p_2 = 0$ という自明な解以外の解をもつとすると、

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) = a_{12}a_{21} \quad (2.3.5)$$

が成り立つ。

まず Claim 1 を示そう。このためには、奢侈品がない、つまり投入行列が既約であるという条件が必要であった。

2 次の場合、それは a_{12}, a_{21} がともに正であるという条件になる。

$a_{12}a_{21} > 0$ のため、式 (2.3.5) より、 $\lambda - a_{11}$ と $\lambda - a_{22}$ の符号は同じになる。式 (2.3.3, 2.3.4) より、 $\lambda - a_{11} < 0, \lambda - a_{22} < 0$ のとき p_1, p_2 の比は負、 $\lambda - a_{11} > 0, \lambda - a_{22} > 0$ のとき p_1, p_2 の比は正になる。

ここで式 (2.3.5) の解のうち、 $\lambda - a_{11} < 0, \lambda - a_{22} < 0$ をみたすものを λ^- 、 $\lambda - a_{11} > 0, \lambda - a_{22} > 0$ をみたすものを λ^+ とすると、 $\lambda^- < a_{11}, \lambda^- < a_{22}, \lambda^+ > a_{11}, \lambda^+ > a_{22}$ 。従って $\lambda^+ > \lambda^-$ 。さらに a_{11}, a_{22} は非負なので、 $\lambda^+ \geq 0$ 。

従って、式 (2.3.5) の解のうち大きい方は非負であり、それに対応する価格比率は正となる。

□

次に Claim 2. を示す。

純生産可能条件より $(1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21} > 0$ なので、式 (2.3.5) より、

$(1 - a_{11})(1 - a_{22}) > (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})$ 。ここで $\lambda \geq 1$ と仮定すると、

$\lambda - a_{11} \geq 1 - a_{11}, \lambda - a_{22} \geq 1 - a_{22}$ で、 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \geq (1 - a_{11})(1 - a_{22})$ となり矛盾。

従って $\lambda < 1$ 。

□

参考文献

Sraffa, Piero. (1960) *Production of Commodities by means of Commodities*, Cambridge at the University Press.

小幡道昭 (2009) 『経済原論』 東京大学出版会。

二階堂副包 (1961) 『経済のための線型数学』 培風館。

投稿規程

1. 投稿論文の要件

以下の全てを満たすこと。

- (1) 投稿資格者は、東京科学大学に所属する教職員（非常勤講師を含む）・大学院生・学生とする。なお、非投稿論文（査読を行わない研究ノート等）は、東京科学大学に所属する教職員が執筆する。
- (2) 原著論文として他誌に投稿されて査読が進行していないこと。
- (3) 原著論文として他誌に掲載されていないこと、掲載される予定となっていないこと。
- (4) 使用言語は和文または英文とする。
- (5) 倫理指針に反していないこと。倫理指針は「倫理規程」に定められている。

2. ページ数

論文の字数は問わない。ただし原則 20,000 字以内とする。査読過程でページ数の増加が発生した場合には、論文委員会の判断により超過を認める場合がある。

3. 論文の受付

論文投稿日（オンラインで投稿完了のメールが著者に届いた日）を原稿の受付日とする。

4. 採録決定時の提出書類

採録決定時には以下の書類を提出すること。

- (1) 最終論文原稿
- (2) 著作権譲渡書
- (3) 倫理に関する誓約書

著作権譲渡書、倫理に関する誓約書については、原本の提出を採録の条件とする。最終論文原稿については、電子ファイルの提出を求める。詳細は、事務局からの指示に従うこと。分量の超過については論文委員会に問い合わせること。体裁については「執筆要項」を遵守すること。最終論文原稿の体裁が指定されたものと著しく異なる場合には掲載を拒否する場合がある。

5. 論文の著作権

採録になった論文の著作権はコモンズ著作権規程にしたがい、未来の人類研究センターに帰属する。

6. 引用にともなう著作権・肖像権等

他の著作物等からの引用にともなう著作権や肖像権等については、著者の責任においてその利用許諾を得る必要がある。

7. 倫理指針の遵守

提出された論文について倫理指針違反が疑われる場合には、論文委員会が調査委員会を設置して事実関係の調査を行う。その際、関係する学会あるいは組織などとの間で論文の内容に関する情報交換を行う場合がある。調査結果

をふまえ、必要に応じて罰則が適用される。

8. 異議申し立て

査読のプロセスに問題がある場合には、理由書を添付の上、申し出を受け付ける。ただし、手続き上の不備以外の理由で査読のやり直し等に応じることはない。

9. 投稿の取り下げ

理由書を添付して申し出ることができる。掲載決定後の取り下げは認めない。

論文委員会規程

(目的)

第1条 論文委員会は論文誌の発行を行う。

(構成)

第2条 論文委員会は委員長、副委員長、委員により構成する。

第3条 委員長の任期は1年とし、再任を妨げない。

第4条 副委員長の任期は1年とし、再任を妨げない。

第5条 副委員長は委員長の補佐を行う。

(業務)

第6条 論文委員会は次の業務を行う。

- (1) 論文募集と査読業務を行う。査読業務とは、査読者の決定、査読過程の管理、採否の検討と決定を指す。
- (2) 特集のテーマを決定し、依頼を行う。

(論文の査読)

第7条 論文査読は次のプロセスによって行う。

- (1) 投稿論文は論文委員会が受理した日を受け付け日とする。
- (2) 論文委員会において査読者（2名、第一査読者、第二査読者）を決定する。2名の査読者のうち、少なくとも1名は学外者とする。第8条（2）にもとづいて行われる第三査読においては編集委員会構成員1名による第三査読者の兼務を妨げない。
- (3) 査読者、投稿者ともに匿名とする。査読期間は原則として1か月とする。（特別の事情がある場合はこれよりも短い期限でよい）
- (4) 論文委員会は査読過程を管理し、期限を過ぎた査読者に対しては催促を行う。催促に応じない場合には、別の査読者を選定する。
- (5) 必要に応じて、投稿者に論文の修正を求める。論文の修正は1回のみとする。修正期間は原則として1か月とする。期限が過ぎても返答がない場合および著者から申し入れがあった場合は、取り下げとする。
- (6) 査読結果にもとづき論文の修正が行われた場合、2名の査読者に対し再査読を依頼する。再査読の期限は原則として1か月とする。期限を過ぎた査読者に対しては催促を行う。催促に応じない場合には、論文委員会が最終的な判定を行う。

(採否の判定)

第8条 採否の判定は次の方法による。

- (1) 採否判定の責任は、委員長にある。
- (2) 論文委員会は、査読者の結果報告に問題がないかを確認し、問題がなければ以下の原則に従って採否の判定を行う。
 - (2-1) 2名の査読者がA判定（このまま、あるいは軽微な字句の修正ののち掲載可）とした場合、採録

とする

(2-2) 査読者のうち1名がD判定(掲載不可)とした場合、採録しない

(2-3) 1名の査読者がA判定とし、もう1名の査読者がB判定(部分的な修正ののち掲載可)もしくはC判定(内容面あるいは構成面に関して大幅な修正が必要)とした場合、あるいは2名の査読者がともにBないしC判定とした場合、投稿者に論文の再提出を求める。論文が再提出された場合、再査読を行う。その際の判定は、AもしくはDのいずれかとする。査読者による判定結果がいずれもA判定となった場合にのみ、採録とする。

(附則)

- 1 本規程に関し疑義が生じた場合は速やかに未来の人類研究センター会議に諮り、その決定に従う。
- 2 本規程は2024年4月1日より実施する。
- 3 本規程を変更する場合は、未来の人類研究センター会議の議決を経る。

